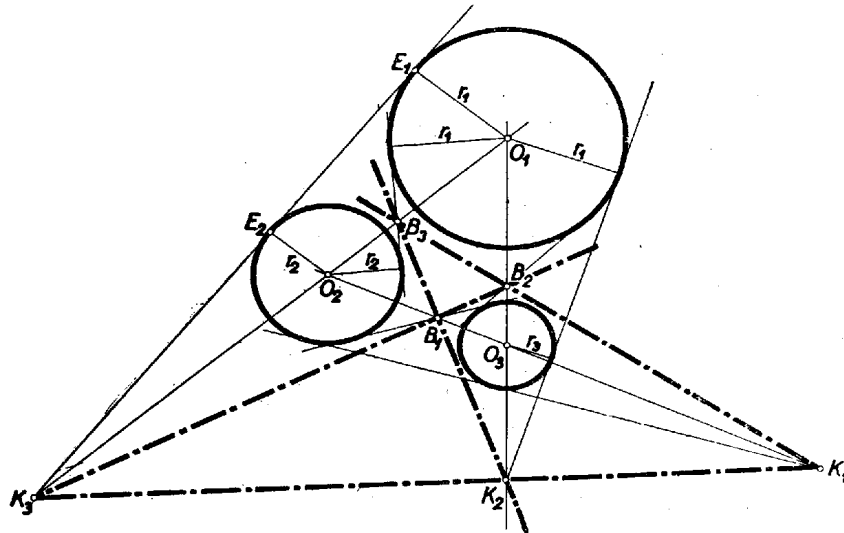


Bizonyításunkat síkbeli megfontolásokból állíthatjuk össze. Tekintsük az E_1, E_2 egyenest és messük a g_1, g_2, g gömböket az O_1, O_2, O középpontjaikkal meghatározott S síkkal, ha pedig a három középpont egy e egyenesbe esik, akkor bármely az e -n átmenő S síkkal. S mindegyik gömbből egy főkört metsz ki, legyen ez k_1, k_2 , illetve k . E_1, E_2 az OO_1, OO_2 egyenesen van, vagyis S -ben, így k érinti k_1 -et és k_2 -t, éspedig ugyanúgy belülről vagy kívülről, ahogyan g érinti g_1 -et, g_2 -t.



Eszerint az E_1E_2 egyenes egy pontja állandóságának kérdése éppen az, amit az 558. gyakorlatban¹ bebizonyítottunk, mert az állandó H_k , ill. H_b pont független S helyzetétől, hiszen O_1O_2 -n van, ezt S minden helyzetében tartalmazza, és a középpontoktól való távolsága csak $O_1O_2 = d$ -től és a főkörök, vagyis a gömbök sugarától függ. Ezek szerint H_k, H_b a két gömb külső, illetve belső hasonlósági pontja. Hasonlók érvényesek az E_1E_3 és E_2E_3 egyenesekre.

Most már arra az állításunkban szereplő három pontra, amelyről meg kell mutatnunk, hogy egy egyenesre esnek, mindössze 6 pont jön számításba, a g_1, g_2, g_3 -ból képezhető három pár külső és belső hasonlósági pontjai. Ezek az $O_1O_2O_3 = S^*$ síkban vannak, és egyszersmind az S^* -gal a gömbökből kimetszett főkörökből képezhető megfelelő pároknak is külső, illetve belső hasonlósági pontjai. Ezekről tudjuk,² hogy hármassával úgy fekszenek négy egyenesen, hogy egyiken a három külső hasonlósági pont van rajta, a továbbiak mindegyikén pedig két belső és egy külső hasonlósági pont, mindig úgy, hogy mindegyik egyenesen mind a három körpár egy-egy hasonlósági ponttal szerepel. Éppen ilyen ponthármasokat kapunk, ha áttekintjük a g és g_1, g_2, g_3 külső vagy belső érintkezésének lehetséges eseteit. Ugyanis g vagy mind a három adott gömbbel ugyanolyan értelmű érintkezésben van, és ekkor az 558. gyakorlat eredménye szerint mindhárom gömbpár külső hasonlósági pontja szerepel a bizonyítandó állításban, vagy egyikkel, pl. g_1 -gyel, ellentétes értelemben érintkezik, mint a másik kettővel, és ekkor a g_1, g_2 és g_1, g_3 gömbpárok belső és a g_2, g_3 pár külső hasonlósági pontjáról kell bizonyítanunk, hogy egy egyenesbe esik. – Ezzel bizonyításunkat befejeztük.

Ha O_1, O_2, O_3 egy t egyenesbe esnek, akkor az említett négy egyenes mindegyike azonos t -vel.

Ha pl. $r_1 = r_2$ és g a g_1, g_2 -t ugyanolyan értelemben érinti, akkor E_1E_2 párhuzamos O_1O_2 -vel, ellentétes értelmű érintés esetén pedig átmegy O_1O_2 felezőpontján. $r_1 = r_2 = r_3$ esetén ugyanezek állnak mindegyik gömbpárra.

Molnár Emil (Győr, Révai M. g. II. o. t.)

¹ Lásd ezen számban 137. o.

² Lásd pl. KML. XIII. kötet, 2. sz. 49. o., 316. gyak. (1956. október), ábrák az ottaninak átvétele, ezért a jelölések mások.