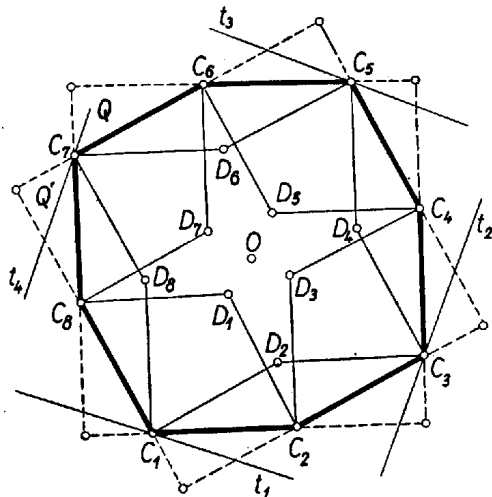


I. megoldás: Legyen a Q és Q' négyzetek közös része a C nyolcszög. Q -t és Q' -t közös O középpontjuk körül 90° -kal elforgatva mindkettő önmagába megy át, így ugyanez áll C -re is.



Ha t_1 egy támaszegyenes C -nek, akkor a belőle O körül egymás utáni 90° -os elforgatásokkal előálló t_2, t_3, t_4 is támaszegyenes C -nek, és e négy egyenes együtt támasznégyszete a C -nek, mert egyrészt közülük bármelyik egymás utáni kettő derékszöget alkot, másrészt a szemben fekvő t_1, t_3 , és t_2, t_4 párok távolsága egyenlő t_1 O -tól való távolságának kétszeresével, és így egymással is. Eszerint C -nek minden támasz téglalapja négyzet, C négyzetekkel burkolható.

Tatai Péter (Budapest, I. István g. IV. o. t.)

II. megoldás: Elég megmutatni, hogy Q és Q' közös $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8 = C$ része tekinthető két négyzetből képezett összegtartománynak, mert minden négyzet négyzetekkel burkolható, és két négyzetekkel burkolható alakzat összege ugyancsak négyzetekkel burkolható.¹ Valóban, C a C_1C_2 és C_2C_3 oldalak fölé befelé szerkesztett Q_1 , ill. Q_2 négyzetekből képezett összegtartomány. Legyen ugyanis a C_{k-1}, C_k, C_{k+1} csúcsokat paralelogrammává kiegészítő pont D_k ($k = 1, 2, \dots, 8$, és természetesen $C_0 \equiv C_8, C_9 \equiv C_1$), ekkor irány és nagyság szerint $\overrightarrow{D_kC_{k+1}} = \overrightarrow{C_{k-1}C_k} = \overrightarrow{C_{k-2}D_{k-1}}$. Másrészt C fönt említett forgási szimmetriája folytán irány és nagyság szerint pl. $\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{C_6C_5}$, továbbá C_1C_2 merőlegesen áll C_3C_4 és C_8C_7 -re és velük egyenlő hosszú. Így Q_1 és Q_2 csúcsai C_1, C_2, D_3, D_8 , ill. C_2, C_3, D_4, D_1 . Képezzük Q_1 és Q_2 -nek C' összegét a C_2 kezdőpontra vonatkozóan. Elég ebben a 4-4 csúcsból vett 16 csúcs-pár „összegét” képezni, mert Q_1, Q_2 -vel C' is konvex.² Ezeket röviden táblázatunk tünteti fel, pl. a D_8 sorában és D_4 oszlopában álló C_6 jelentése: $\overrightarrow{C_2D_8} + \overrightarrow{C_2D_4} = \overrightarrow{C_2C_6}$. Valóban

	$C_2 \ C_3 \ D_4 \ D_1$	
C_1	$C_1 \ D_2 \ D_5 \ C_8$	$\overrightarrow{C_2D_8} + \overrightarrow{C_2D_4} = (\overrightarrow{C_2C_1} + \overrightarrow{C_1D_8}) +$
C_2	$C_2 \ C_3 \ D_4 \ D_1$	$+ (\overrightarrow{C_2C_3} + \overrightarrow{C_3D_4}) =$
D_3	$D_3 \ C_4 \ C_5 \ D_6$	$= (\overrightarrow{C_5C_6} + \overrightarrow{C_3C_4}) + (\overrightarrow{C_2C_3} + \overrightarrow{C_4C_5}) =$
D_8	$D_8 \ D_5 \ C_6 \ C_7$	$= \overrightarrow{C_2C_3} + \overrightarrow{C_3C_4} + \overrightarrow{C_4C_5} + \overrightarrow{C_5C_6} = \overrightarrow{C_2C_6}.$

Összeként megkaptuk valamennyi C_k és D_k pontot. Ámde mindegyik D_k belső pontja C -nek, mert C minden szöge tompaszög (a Q és Q' csúcsai körüli, lemetezett derékszögű háromszögek külső szögei), ennél fogva

$$D_kC_{k-1}C_k \angle = D_kC_{k+1}C_k \angle < 90^\circ < C_{k+2}C_{k+1}C_k \angle = C_kC_{k-1}C_{k-2} \angle.$$

Eszerint C' csúcsai a C_k pontok és C' azonos C -vel, amit bizonyítani akartunk.

Bartha László (Balassagyarmat, Balassa B. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. A $Q_1 + Q_2 = C$ egyenlőséget az összegtartomány szemléletes értelmezése³ alapján is beláthatjuk. A $C_1C_2, C_3C_4, C_5C_6, C_7C_8$ oldalra befelé írt négyzetek a forgási szimmetria folytán egybevágók, másrészt egyező állásúak, ezért egymásba eltolással is átvihetők: Q_1 egymás utáni eltolásainak vektorai rendre $\overrightarrow{C_2C_3}, \overrightarrow{C_4C_5}, \overrightarrow{C_6C_7}, \overrightarrow{C_8C_1}$, és ezek éppen egyenlők Q_2 egymás utáni oldalaiával, ha ezeket vektoroknak tekintjük. Így C „súrolással” úgy is előáll, ha Q_1 -et végigvezetjük Q_2 kerületén (könnyű belátni, hogy „középen” nem marad súrolatlan terület), vagy lefedéssel úgy, hogy a végtelen sok példányban vett Q_1 -ből C_2 -nél fogva Q_2 -nek minden pontjára teszünk egyet.

Dániel Gábor (Budapest, Piarista g. IV. o. t.)

¹ Lásd Kárteszi Ferenc: Négyzetekkel burkolt konvex alakzatok, KML. XVIII. köt. 1., ill. 34 o. 1959 jan., ill. febr.

² Ugyanott, 33. o.

³ Ugyanott, 6. o.