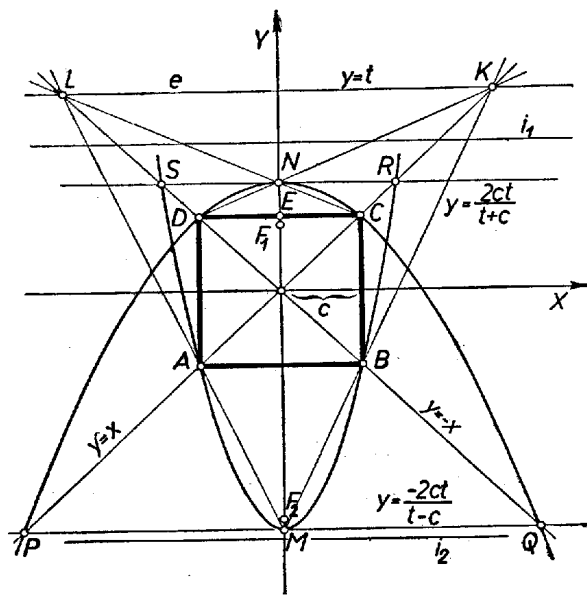


Válasszuk a négyzet középpontját koordináta-rendszerünk origójának, oldalfelezőit pedig tengelyeknek úgy, hogy a négyzet csúcsai, rendre $A(-c, -c)$, $B(c, -c)$, $C(c, c)$, $D(-c, c)$; legyen másrészt az AB oldallal párhuzamos tetszőleges egyenes: $y = t$.



Az AC , ill. BD átló egyenese $y = x$, ill. $y = -x$, így $K(t, t)$, $L(-t, t)$. A szimmetriákból nyilvánvaló, hogy M és N az Y -tengelyen van. M ordinátája a BK egyenes tengelymetszeteként az $y + c = (x - c)(t + c)/(t - c)$, $x = 0$ egyenletrendszerből $y = -2ct/(t - c)$, eszerint M a $t = c$, azaz $K \equiv C$ és $L \equiv D$ eset kivételével mindig létezik. N ordinátáját hasonlóan kapnók DK -ból, egyszerűbb azonban ha M ordinátájában c helyett $-c$ -t írunk: $2ct/(t + c)$, ugyanis D koordinátái is így állnak elő B koordinátáiból; N a $t = -c$, vagyis $K \equiv A$ és $L \equiv B$ eset kivételével mindig létezik.

Most már K és L mintájára:

$$P\left(\frac{-2ct}{t-c}, -\frac{2ct}{t-c}\right), Q\left(\frac{2ct}{t-c}, -\frac{2ct}{t-c}\right);$$

$$R\left(\frac{2ct}{t+c}, \frac{2ct}{t+c}\right), S\left(-\frac{2ct}{t+c}, \frac{2ct}{t+c}\right).$$

A C, D, N, P, Q („első”) pont-ötös szimmetrikus az Y -tengelyre, így a kérdéses parabola tengelye is csak az Y tengely lehet, csúcsa pedig az N pont. Eszerint elég azt megmutatnunk, hogy a C, D , ill. P, Q tükrös pontpárok egyik-egyik pontja kielégít egy

$$x^2 = 2p_1[y - 2ct/(t + c)]$$

alakú egyenletet, vagyis hogy a

$$p_1 = \frac{x^2}{2\left(y - \frac{2ct}{t+c}\right)}$$

hányados az előjellel vett paraméterre a C, D pontpárral ugyanazt az értéket adja mint a P, Q pontpárral. Valóban, mindkét esetben $p_1 = c(t + c)/2(c - t)$ adódik, – Hasonlóan az A, B, M, R, S („második”) pont-ötös is meghatároz egy parabolát melynek csúcsa M , tengelye ugyancsak az Y tengely, és előjeles paramétere:

$$p_2 = \frac{x^2}{2\left(y + \frac{2ct}{t-c}\right)} = \frac{c^2}{2\left(-c + \frac{2ct}{t-c}\right)} = \frac{\left(\frac{2ct}{t+c}\right)^2}{2\left(\frac{2ct}{t+c} + \frac{2ct}{t-c}\right)} = \frac{c(t-c)}{2(t+c)}.$$

A fókusz a tengelyen a csúcstól mérve $p/2$ távolságban van, (a paraméter előjelét figyelembe véve), így paraboláink F_1 , ill. F_2 fókuszának abszcisszája 0, ordinátája pedig:

$$\frac{2ct}{t+c} + \frac{c(t+c)}{4(c-t)} = \frac{c(c^2 + 10ct - 7t^2)}{4(c^2 - t^2)},$$

$$\text{ill. } -\frac{2ct}{t-c} + \frac{c(t-c)}{4(t+c)} = \frac{c(c^2 - 10ct - 7t^2)}{4(t^2 - c^2)}.$$

Másrészt CD felezőpontja $E(0, c)$ így a kérdéses egybeesés feltétele:

$$\frac{c(c^2 + 10ct - 7t^2)}{4(c^2 - t^2)} = c, \quad \text{ill.} \quad \frac{c(c^2 - 10ct - 7t^2)}{4(t^2 c^2)} = c$$

amiből

$$t_1 = 3c, \quad t_2 = c/3, \quad \text{ill.} \quad t_{3,4} = \frac{-5 \pm 4\sqrt{5}}{11}c \approx \begin{cases} c \cdot 0,3586, \\ -c \cdot 1,268, \end{cases}$$

vagyis négy olyan e egyenes van, amelyből egy-egy E -fókuszú parabola adódik, kettő-kettőnél F_1 , ill. F_2 esik E -be. – Az első parabolán C és D rajta fekszik, így ha E fókusz, akkor $|2p| = 2c$. Valóban, $t_1 = 3c$ -vel $p_1 = -c$ és $t_2 = c/3$ -mal $p_1 = c$ adódik. Az utóbbi esetben $P \equiv C$, $Q \equiv D$, így az első parabola C , ill. D -ben érinti AC -t, BD -t.

Hahn János (Szeged, Déri M. gépip. t. III. o.t.)