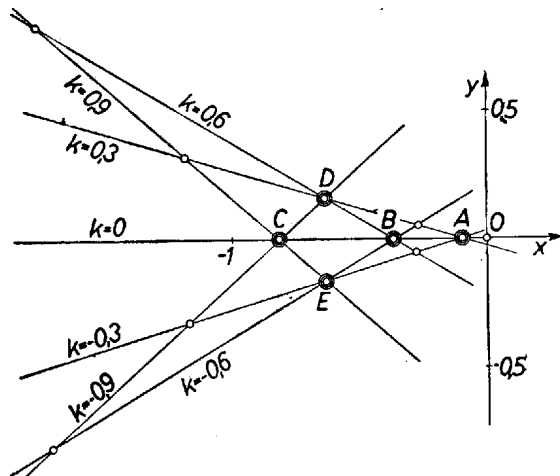


Az $y = -kx - k^3$ alakból a $-k$ irányítényező mind a hét megrajzolt egyenesre más, tehát nincsenek köztük párhuzamosak. Így mindegyik egyenesünkön 6 metszéspont várható, összesen pedig $7 \cdot 6/2 = 21$ (felezzük a $7 \cdot 6$ szorzatot, mert benne minden metszést két egyenesnél vettünk számításba). – Rajzunkon viszont csak 11 különböző metszéspontot találunk, ugyanis 5 ponton 3–3 egyenes megy át, további 6 ponton 2–2 egyenes; az előbbieket 3-szor (pl. a és b , a és c , b és c metszéseként) számítva a metszések száma $3 \cdot 5 + 6 = 21$.



A rajz szerint a $k = 0$ -hoz tartozó $y = 0$ egyenest, az X -tengelyt a $\pm 0,3$, $\pm 0,6$, $\pm 0,9$ k -értékpárokhoz tartozó egyenespárok ugyanazon A , ill. B , ill. C pontban metszik, továbbá egy D ponton mennek át a $k'_1 = 0,3$, $k'_2 = 0,6$, $k'_3 = -0,9$ -hez tartozó egyenesek és egy E -n a $k''_1 = -0,3$, $k''_2 = -0,6$, $k''_3 = 0,9$ -hez tartozó egyenesek. – Valóban, bármely $\alpha \neq 0$ mellett a $k = \alpha$ és $k = -\alpha$ -hoz tartozó $y = -\alpha x - \alpha^3$ és $y = \alpha x + \alpha^3$ egyenesek egymás tükörképei az X -tengelyre, és így egymást e tengelyen metszik, $\alpha - \alpha^2 = -(-\alpha)^2$ abszcisszájú pontban. – Vegyük észre, hogy a D -n, E -n átmenő 3–3 egyenesre $k'_1 + k'_2 + k'_3 = k''_1 + k''_2 + k''_3 = 0$, és ugyanez áll az előző hármasokra is: $0 + \alpha - \alpha = 0$. Megmutatjuk, hogy ha a tetszés szerinti, páronként egymástól különböző k_1, k_2, k_3 számokra $k_1 + k_2 + k_3 = 0$, akkor a megfelelő e_1, e_2, e_3 egyenesek egy ponton mennek át. Így $k_3 = -(k_1 + k_2)$, és egyenleteik rendre

$$\begin{aligned} (1) \quad & k_1 x + y + k_1^3 = 0, \\ (2) \quad & k_2 x + y + k_2^3 = 0, \\ & -(k_1 + k_2)x + y - (k_1 + k_2)^3 = 0. \end{aligned}$$

(1) és (2)-ből y kiküszöbölése után e_1 és e_2 M_{12} metszéspontjának x_{12} abszcisszájára, majd y_{12} ordinátájára:

$$(3) \quad \begin{cases} x_{12} = -\frac{k_1^3 - k_2^3}{k_1 - k_2} = -k_1^2 - k_1 k_2 - k_2^2 = -(k_1 + k_2)^2 + k_1 k_2, \\ y_{12} = -k_1 x_{12} - k_1^3 = k_1^2 k_2 + k_1 k_2^2 = k_1 k_2 (k_1 + k_2), \end{cases}$$

és ezek kielégítik a harmadik egyenletet, tehát a harmadik egyenes valóban átmegy az első kettő metszéspontján. Ezzel a rajzunk alapján sejtett szabályszerűséget bebizonyítottuk.

Több k -hoz tartozó egyenes berajzolása esetén nem jön létre olyan metszéspont, amelyen háromnál több egyenes megy át. Ennek bizonyítása végett megmutatjuk előbbi eredményünk fordítottját: ha (rajzunkon csak $kx + y + k^3 = 0$ egyenesek vannak megrajzolva és) valamely M ponton három e_1, e_2, e_3 , egyenes megy át: (1), (2) és a k_3^3 -hoz tartozó

$$(4) \quad k_3 x + y + k_3^3 = 0,$$

akkor $k_1 + k_2 + k_3 = 0$. Valóban, feltevésünk azt jelenti, hogy M -ben M_{12} , és az e_1 és e_3 -nak a (3) mintájára adódó $M_{13}(-k_1^2 - k_1 k_3 - k_3^2, k_1^2 k_3 + k_1 k_3^2)$ metszéspontja egybeesnek:

$$-k_1^2 - k_1 k_2 - k_2^2 = -k_1^2 - k_1 k_3 - k_3^2$$

és

$$k_1^2 k_2 + k_1 k_2^2 = k_1^2 k_3 + k_1 k_3^2.$$

E két egyenlőséget 0-ra redukálva

$$-k_1(k_2 - k_3) - (k_2 - k_3)(k_2 + k_3) = (k_3 - k_2)(k_1 + k_2 + k_3) = 0$$

és

$$k_1^2(k_2 - k_3) + k_1(k_2^2 - k_3^2) = k_1(k_2 - k_3)(k_1 + k_2 + k_3) = 0.$$

$k_2 \neq k_3$, folytán az elsőből $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ ez a másodikból is adódik, ugyanis az indexek alkalmas választásával $k_1 \neq 0$.

Ha már most M -en a k_4 -hez tartozó e_4 is átmenne, akkor e_1, e_2 és e_4 közös pontja folytán $k_1 + k_2 + k_4 = 0$; és így $k_4 = k_3$ tehát e_4 nem különböző e_3 -től.

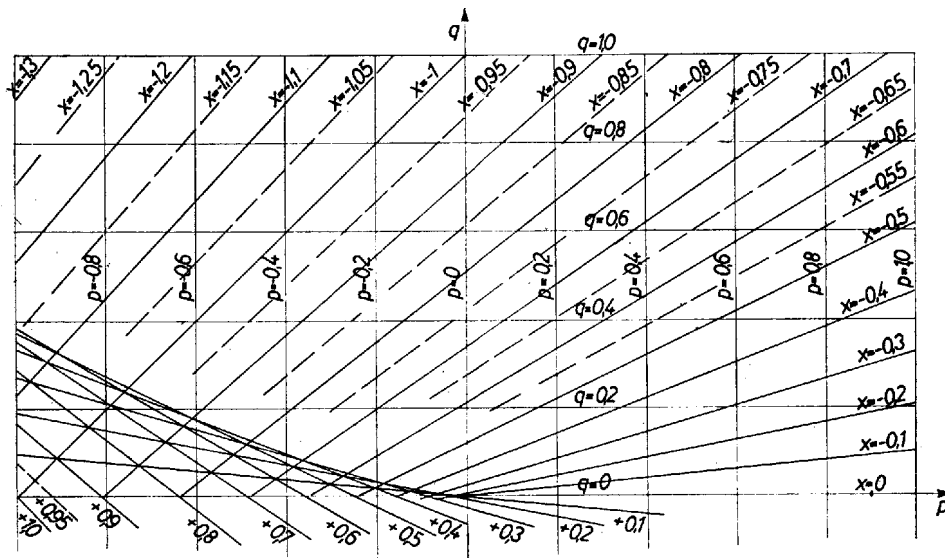
Mindezek alapján (rajz nélkül) kimondhatjuk, hogy a 21 egyenes esetében annyiszor 2 metszéspont esik egybe egy korábbival, ahányféleképpen az adott 21 számból választott három különböző szám összegeként 0-t kapunk. Ha $k_1 = 0$, akkor ez $k_2 = \alpha$ és $k_3 = -\alpha$ -val 10-féleképpen lehetséges. Ha mindhárom k különbözik 0-tól, akkor kettő egyenlő jelű, a harmadik ezek összegének ellentettje. Egyszerűség kedvéért az értékek 10-szeresével dolgozva azt kell keresnünk, hányféleképpen lehet előállítani az 1, 2, ..., 10 számokat két különböző természetes szám összegeként. Ez rendre 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4-féleképpen, összesen 20-féleképpen lehetséges. (Általában $2k-1$ és $2k$ -ra egyaránt $k-1$ előállítás van: $2k-1 = 1 + (2k-2) = 2 + (2k-3) = \dots = (k-1) + k$ és $2k = 1 + (2k-1) = 2 + (2k-2) = \dots = (k-1) + (k+1)$). Ezt a számot $(-1, -2, \dots, -10$ -es összegek!) kétszer véve rajzunkon $10 + 2 \cdot 20 = 50$ háromszoros metszés pont lenne, továbbá $21 \cdot 10 - 3 \cdot 50 = 60$ egyszeres, összesen 110.

Zeke András (Budapest, Bolyai J. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A feladat 7 egyenesre vonatkozó részével azt céloztuk, hogy megoldóink „kísérleti úton”, kicsiben, olyan keretek között, amelyet még kis munkával lehet megrajzolni, észreveggyék a szabályszerűségeket. Ennyi tapasztalatszerzés és annak helyes megmagyarázása elegendő alap ahhoz, hogy a 21 egyenes bonyolultabb esetét már elméleti úton oldhassuk meg. Sokan azonban pontatlan vázlatból, vagy rajz nélkül indultak, a valóságot torzítva, vagy vele mit sem törődve; „róla-nélküle” írtak a kérdésről. Ne tápláljunk olyan téves nézeteket, hogy egyes esetek vizsgálata nem illő a matematikushoz. Ellenkezőleg, igen sok vizsgálat – az új kérdések kezdeti vizsgálata igen gyakran – egyes esetekből indul ki. A matematika elvonással általános tételeket állapít meg, de a semmiből nem lehet absztrahálni.

2. Tekintsük a $k^3 + xk + y = 0$ egyenletben k -t ismeretlennek, x, y -t együtthatóknak, így egy ún. redukált harmadfokú egyenlet áll előttünk (a köbös tag együtthatója 1, a négyzetesé 0). Gondoljuk másrészt minden valós k számhoz megrajzolva az ezen egyenlettel jellemzett egyenest. Így minden egyes k_0 -hoz tartozó egyenes a rajta fekvő (x, y) pontok koordináta párpai révén megadja az összes olyan redukált harmadfokú egyenletek (x, y) együttható párpaiját (x mindig az elsőfokú tag együtthatója, y az ismeretlentől mentes tag), amelyeknek a k_0 szám gyöke; és fordítva: minden egyes (x_0, y_0) együttható párral meghatározott (x_0, y_0) ponton átmege minden olyan valós k -hoz tartozó egyenes, amely kielégíti az ezen együtthatókkal felírt redukált harmadfokú egyenletet. Eszerint – tudva azt, hogy minden valós együtthatós harmadfokú egyenletnek vagy egy valós gyöke van, vagy három – az utóbbi esetben közülük kettő vagy három meg is egyezhet –, kapjuk, hogy a sík minden pontján vagy egy egyenes mege át vagy három, esetleg kivételesen kettő.

Ha már most az áttekinthetőség érdekében a berajzolt egyenesek számát megfelelően csökkentjük, akkor (természetesen bízva abban, hogy pl. a kihagyott $k = 0,537$ -hez tartozó egyenes valahol a $k = 0,5$ -höz és a $k = 0,6$ -hoz tartozó egyenesek között vagy a közelükben halad) rajzunkról a redukált harmadfokú egyenletek valós gyökét (gyökeit) közelítőleg leolvashatjuk. Ábránk a redukált harmadfokú egyenlet valós gyökeinek közelítő leolvasására szolgáló *vonalsereges* (egyenessereges) *nomogram*.¹ A redukált harmadfokú egyenletet az $x^3 + px + q = 0$ általános alakban szokás írni, ezért ábránk tengelyeit is p, q -val jelöltük, az eddigi k helyére pedig x lép.



Pl. az $x^3 - 0,73 + 0,072 = 0$ egyenlet gyökei a rajz szerint, amennyire a $(-0,73; 0,072)$ pont a rajzon felismerhető, $x_1 = -0,9$, $x_2 = 0,1$, $x_3 = 0,8$, mert az említett ponton átmenő három egyenesen a $(k =) x = -0,9$, ill. $0,1$, ill. $0,8$ jelzés olvasható (ellenőrizzük a gyököket!). – Az $f(x) = x^3 + 0,8x + 0,8 = 0$ egyenlet (egyetlen) valós gyöke közelítőleg $x_1 \approx -0,65$; ellenőrzés: $f(-0,65) \approx +0,003$. – A rajzról vett közelítő értékek alapján a gyökök pontosabb közelítő értékét szükség esetén számítással szokás képezni (a gyökök „kifinomítani”).

¹ Lásd pl. Pálmai Lóránt: Egyszerű nomogramok. KML. XIII. kötet, 65–74. o. (1956: november).

Bár ábránkon a p, q koordináta-rendszernek csak a $-1 \leq p \leq 1, 0 \leq q \leq 1$ téglalapja látható, róla az alábbi példák mintájára mégis minden (valós együtthatós) redukált harmadfokú egyenlet gyökeiről tájékozódhatunk, első értékes jegyét leolvashatjuk és a másodikat megbecsülhetjük. A $g(x) = x^3 + 0,5x - 0,5 = 0$ egyenlet minden gyöke -1 -szer akkora, mint a $(-z)^3 + 0,5(-z) - 0,5 = 0$, másképpen $z^3 + 0,5z + 0,5 = 0$ egyenlet egyik gyöke; az utóbbinak egyetlen valós gyöke a rajzról $z \approx -0,59$, ezért $g(x) = 0$ egyetlen valós gyöke $z \approx 0,59$; valóban $g(0,59) \approx +0,0004$. – A $h(x) = x^3 - 48x + 130 = 0$ egyenletből $x = 10u$ helyettesítéssel $u^3 - 0,48u + 0,13 = 0$ -hoz $u_1 \approx -0,8, u_2 \approx 0,4$ tehát $x_1 \approx -8, x_2 \approx 4$; ellenőrzés: $h(-8) = +2, h(4) = +2$.

Itt indokolás nélkül megjegyezzük a következőket: a $(-0,48; 0,13)$ pont közelében csak két egyenest látunk, de tudjuk, hogy $u_1 + u_2 + u_3 = 0$, tehát $u_3 \approx +0,4, x_3 \approx 4$ (kétszeres gyök). Ilyenkor valós kétszeres gyök helyett olyan konjugált komplex gyökpár is lehetséges, amelyben a képzetes rész „kicsi”. Valóban, pontosabb számítással $x_1 \approx 8,01386$, és az x_1 leválasztásával adódó $x^2 - 8,01386x + 16,2219 = 0$ egyenletből (amelynek együtthatói $1, x_1$ és $130/x_1$) számítással $x_{2,3} \approx +4,00793 \pm i0,4079$. – Ilyen „veszély” akkor és csak akkor áll fenn, ha a (p, q) ponthoz közel eső egyenesekről leolvasott x -ek aránya közel -2 ; vagy szemléletesen: ha a (p, q) pont közel van a nomogram vonalakkal „sűrűn”, ill. „ritkán” átjárt részeinek jól látható határához.

Hasonlóan $x^3 - 4,8 \cdot 10^{-5}x - 1,3 \cdot 10^{-7} = 0$ -ból $100x = w$ közvetítéssel $w^3 - 0,48w - 0,13 = 0$ és $x_1 \approx 8,01386 \cdot 10^{-3}$ és $x_{2,3} \approx (4,008 \pm i0,408) \cdot 10^{-3}$. „Túl kicsi” együtthatók esetén a leolvasást eszerint tehetjük pontosabbá. – Olvassunk le közelítő értéket még az $x^3 + 500x - 1,3 = 0$, és az $x^2 - 0,72x + 53,8 = 0$ egyenlet gyökeire is!