

I. megoldás: Legyenek sorozatunk tagjai: $a_1, a_2, \dots, a_n$, különbségi sorozatának tagjai $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$, ahol $d_k = a_{k+1} - a_k$. Ennek első kilenc tagja: 8, 6, 16, 10, 24, 14, 32, 18, 40. Mindegyik páros indexű különbség kisebb az előtte álló tagnál, és (d_1 -et nem tekintve) mindegyik páratlan indexű nagyobb az előtte állónál, mert az ún. második különbségi sorozatban ($e_k = d_{k+1} - d_k$), $a - 2, 10, -6, 14, -10, 18, -14, 22$ tagok váltakozó előjelűek.

Erre támaszkodva tegyünk külön-külön próbát az eredeti sorozat páratlan és páros indexű tagjaival. Ezeket a' , a'' -vel, a különbségi sorozatok tagjait d' , d'' , e' , e'' -vel jelölve:

$$\begin{array}{ll} a' : & 2, \quad 16, \quad 42, \quad 80, \quad 130 \\ d' : & \quad 14, \quad 26, \quad 38, \quad 50, \\ e' : & \quad \quad 12, \quad 12, \quad 12 \end{array} \quad \begin{array}{ll} a'' : & 10, \quad 32, \quad 66, \quad 112, \quad 170 \\ d'' : & \quad 22, \quad 34, \quad 46, \quad 58 \\ e'' : & \quad \quad 12, \quad 12, \quad 12, \end{array}$$

e' és e'' állandók, ezért a d' , d'' tagok számtani sorozatok. Tegyük fel, hogy ez a szabályszerűség bármely sorszámú tagra fennáll. Eszerint:

$$\begin{aligned} a'_k = a_{2k-1} &= a'_1 + (d'_1 + d'_2 + \dots + d'_{k-1}) = a'_1 + \frac{k-1}{2} [2d'_1 + (k-2)e'_1] = \\ &= 2 + \frac{k-1}{2} [28 + 12(k-2)] = 6k^2 - 4k, \\ a''_k = a_{2k} &= a''_1 + (d''_1 + d''_2 + \dots + d''_{k-1}) = a''_1 + \frac{k-1}{2} [2d''_1 + (k-2)e''_1] = \\ &= 10 + \frac{k-1}{2} [44 + 12(k-2)] = 6k^2 + 4k, \end{aligned}$$

páratlan, ill. páros n esetére $k = (n+1)/2$ -t, ill. $k = n/2$ -t írva:

$$a_n = \frac{3n^2 + 2n - 1}{2}, \quad \text{ill.} \quad a_n = \frac{3n^2 + 4n}{2},$$

és a 954. feladatban¹ használt elvvel

$$a_n = \frac{3n^2 + [3 + (-1)^n]n}{2} - \frac{1 - (-1)^n}{4} = \frac{1}{4} [6n^2 + 6n - 1 + (2n+1)(-1)^n].$$

Kovács Margit (Szombathely, Savaria g. III. o. t.)

Megjegyzés: Az $a_{2k-1} = 6k^2 - 4k$, $a_{2k} = 6k^2 + 4k$ képletek a következő szabályszerűségekből, illetve fennmaradásuk megköveteléséből is kiadódnak:

$$\begin{array}{lll} a_2 + a_1 = 12 = 12 \cdot 1^2 & a_4 + a_3 = 48 = 12 \cdot 2^2 & a_6 + a_5 = 108 = 12 \cdot 3^2 \\ a_2 - a_1 = 8 = 8 \cdot 1 & a_4 - a_3 = 16 = 8 \cdot 2 & a_6 - a_5 = 24 = 8 \cdot 3 \\ a_8 + a_7 = 192 = 12 \cdot 4^2 & a_{10} + a_9 = 300 = 12 \cdot 5^2 & \\ a_8 - a_7 = 32 = 8 \cdot 4 & a_{10} - a_9 = 40 = 8 \cdot 5, & \end{array}$$

így vehetjük a továbbképezés szabályának a következőt:

$$a_{2k} + a_{2k-1} = 12k^2, \quad a_{2k} - a_{2k-1} = 8k, \quad \text{és ezekből mint egyenletrendszerből adódik } a_{2k} \text{ és } a_{2k-1}.$$

II. megoldás: A (kettéosztatlan) sorozat d_k különbségi sorozata hasonló szerkezetű a 954. feladatban látott sorozathoz:

$$\begin{aligned} d_{2k-1} &= 8 + 8(k-1) = 8k, & d_n &= 4n + 4, & \text{ha } n & \text{ páratlan,} \\ d_{2k} &= 6 + 4(k-1) = 4k + 2, & d_n &= 2n + 2, & \text{ha } n & \text{ páros.} \end{aligned}$$

Az $a_{n+1} = a_1 + (d_1 + d_2 + \dots + d_n)$ kifejezése céljára írjuk fel a d -sorozat n tagjának összegét is a 954. feladat mintájára

$$S_{2k} = S'_k + S''_k = \frac{k}{2} (8 + d_{2k-1} + 6 + d_{2k}) = \frac{k}{2} (16 + 12k) = 6k^2 + 8k,$$

$$S_{2k-1} = S_{2k} - d_{2k} = 6k^2 + 4k - 2, \text{ azaz}$$

$$S_n = \begin{cases} \frac{3n^2 + 8n}{2}, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \frac{3n^2 + 10n + 3}{2}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

¹Lásd ezen számban, 106. o.

Összefoglalva: n bármely pozitív egész értékére.

$$S_n = \frac{1}{4} [6n^2 + 18n + 3 - (2n + 3)(-1)^n],$$

és így:

$$a_{n+1} = 2 + S_n = \frac{1}{4} [6n^2 + 18n + 11 - (2n + 3)(-1)^n],$$

végül n helyett $n - 1$ -et, $(-1)^n$ helyére $(-1)^{n-1} = -(-1)^n$ -et írva

$$a_n = \frac{1}{4} [6(n - 1)^2 + 18(n - 1) + 11 - (2n + 1)(-1)^{n-1}] = \frac{1}{4} [6n^2 + 6n - 1 + (2n + 1)(-1)^n].$$

Bürger Nándor (Budapest, József A. g. III. o. t.)