I. megoldás: Tegyük fel – a bizonyítandó állítással ellentétben –, hogy egy az $N=\overline{abc}$ szám jegyeiből felcseréléssel képezett N' szám többszöröse N-nek: $N'=kN$, ahol k egész szám. Tekintsük a $D=N'-N=(k-1)\,N$ számot; megmutatjuk, hogy ez osztható 9-cel: $D=9M$, ahol M egész. Ugyanis $N=100a+10b+c=a\cdot 10^2+b\cdot 10^1+c\cdot 10^0$, és $N'=a\cdot 10^\alpha+b\cdot 10^\beta+c\cdot 10^\gamma$, ahol α, β, γ a 0, 1, 2 kitevőket jelentik valamely sorrendben, tehát $D=a(10^\alpha-10^2)+b(10^\beta-10^1)+c(10^\gamma-10^0)$, és itt mind a három tag osztható $10-1=9$-cel, mert a különbség vagy 0, vagy 10 egy alkalmas hatványát kiemelve egy $\pm(10^\delta-1)$, $\delta\geq 1$ alakú tényező marad, ami osztható 9-cel. Másrészt, a kisebbítendőt növelve, a kivonandót csökkentve $D=N'-N<1000-100=900$; eszerint $M=D/9<100$, vagyis M legfeljebb kétjegyű szám.

Most már a $(D=)\,9M=(k-1)\,N$ egyenlőség világosan mutatja, hogy ellentmondásra jutottunk: a bal oldalnak legfeljebb kétjegyű törzsszám-osztója lehet, a jobb oldalnak pedig van háromjegyű törzsszám osztója: az N szám. – Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Tomcsányi Gyula (Budapest, Toldy F. g. II. o. t.)

Megjegyzések: 1. Nem mondtuk ki, de nyilvánvaló, hogy $k>1$, vagyis azt bizonyítottuk, hogy N a N'-nek *valódi* (N'-nél kisebb) *osztója* nem lehet. Számos dolgozat kizárta a vizsgálatból az $\overline{aac}$, $\overline{aba}$, $\overline{abb}$ alakú törzsszámokat, amilyenek pl. 331, 313, 311 ($\overline{aaa}$ alakú törzsszám nincs, mert $111=3\cdot 37$). Ez nem célszerű, mert az $N'>N$ feltevéssel a tétel az egyenlő jegyeket is tartalmazó törzsszámokra is érvényes; már pedig a háromjegyű törzsszámoknak közel a harmadában két jegy egyenlő.

2. Az is ellentmondás, hogy a bal oldal osztható 9-cel, a jobb oldal pedig nem, mert N törzsszám, $k-1$ pedig az 1, 2, …, 8 számok valamelyike, hiszen $k<10$, mert $k=10$-zel $N'=10\,N=\overline{abc0}$ négyjegyű szám lenne. – Ez mutatja, hogy az állítás minden 3-mal nem osztható összetett számra is érvényes, akárhány jeggyel van is leírva.

Pósa Lajos (Budapest XIII., Sziget utcai ált. isk. V. o. t.)

3. Az állítás az $N'\neq N$ megszorítással a törzsszámoknak bármely számrendszerben felírt alakjára érvényes, hacsak az illető rendszerben többjegyűek (egyjegyű számban viszont nincs értelme a jegyek felcserélésének). Legyen ugyanis az alapszám B (bázis), így a fentiekhez hasonlóan $D=(B-1)\,M=(k-1)\,N$, és itt N több jeggyel van írva az egyjegyű $B-1$-nél is, M-nél is. Valóban, N jegyeinek számát j-vel jelölve $B^{j-1}\leq N$, $N'<B^j$, így $D=(B-1)\,M<B^j-B^{j-1}=B^{j-1}\,(B-1)$, tehát $M<B^{j-1}$ (mert $B\neq 1$, és így $B-1\neq 0$), már pedig B^{j-1} a B-alapú számrendszer legkisebb j-jegyű száma. – Érvényes az állítás minden a $B-1$-hez relatív prím nem-törzsszám N-re is.

4. Számos dolgozat az $N'=\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$ számokról külön-külön mutatta meg, hogy a velük képezett $N'-N$ különbségnek nem lehet háromjegyű törzsszám-osztója. Az ilyen dolgozatok hosszadalmasak, és rendszerint mégis hiányosak.

II. megoldás: Az $N'=kN$ feltevés lehetetlenségét az is mutatja, hogy sorravéve a k-ként szóbajövő 2, 3, …, 9 értékeket, valamennyi ellentmondásra vezet. N prím, tehát nem osztható 3-mal, így jegyeinek összege sem, ez az összeg N'-re ugyanaz, ezért N' sem osztható 3-mal, tehát k nem lehet 3, 6, 9. Lehetetlen $k=2$, 5, 8 is, mert ha $N=3C+1$, akkor ezekkel $N'=kN$ a $3E+2$ alakban írható, ha pedig $N=3C+2$, akkor $N'=3E+1$, így N és N'-ben a jegyek összege – ami 3-mal osztva ugyanannyi maradékot ad, mint maga a szám – nem lehetne egyenlő.

$k=4$ mellett N' utolsó jegye, vagyis N egyik jegye páros volna, másrészt $N<250$, így első jegye 1, vagy 2. Az első esetben $a=1$, páratlan, s mivel c is páratlan, mert N prím, azért N páros jegye b. Eszerint $N'=\overline{cab}$, és így az $N'=4N$ feltevésből:

$$100c+10a+b=400a+40b+4c,\quad \text{azaz}\quad 96c=3\cdot 13(10a+b),$$

és ez lehetetlen, mert a bal oldal nem osztható 13-mal. – Ha pedig $a=2$, akkor b legfeljebb 4, és N' első jegye legalább 8. Ez csak c lehet, c viszont páratlan, tehát $c=9$. Így $4N=N'$-nek utolsó jegye 6, ilyen pedig N-ben nincs.

Végül $k=7$ mellett $N<1000/7<143$, így $a=1$ és $b\leq 4$, ezért N' első jegye legalább 7, tehát $c=7$, vagy 9. Az első esetben $N'=7N$-nek utolsó jegye 9, ezt a és b korlátozott értékei nem adhatják; $c=9$ esetén pedig $7N$ utolsó jegye 3, így $N=139$ lenne, de $7N=973$ nem az N jegyeiből áll.

Ezzel k minden szóbajövő értékét kizártuk, feltevésünk lehetetlennek bizonyult.

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)