

Vegyük észre, hogy S egymás utáni tagjaiban az együttható rendre az első $1, 2, 3, 4, \dots, n$ természetes szám összege:

$$3 = 1 + 2, \quad 6 = 1 + 2 + 3, \quad \dots, \quad n(n+1)/2 = 1 + 2 + \dots + n.$$

Eszerint S így írható:

$$\begin{aligned} S = & x + \\ & + x^2 + 2x^2 + \\ & + x^3 + 2x^3 + 3x^3 + \\ & + x^4 + 2x^4 + 3x^4 + 4x^4 + \\ & + \dots + \\ & + x^n + 2x^n + 3x^n + 4x^n + \dots + nx^n. \end{aligned}$$

Itt az oszlopok száma n , és minden oszlop egy-egy mértani sor, rendre $n, n-1, n-2, \dots, 1$ taggal. A hányados mindenütt: $x \neq 1$, tehát alkalmazhatjuk a sor összeg-képletét:

$$\begin{aligned} S &= \frac{x(x^n - 1)}{x - 1} + \frac{2x^2(x^{n-1} - 1)}{x - 1} + \frac{3x^3(x^{n-2} - 1)}{x - 1} + \dots + \frac{nx^n(x - 1)}{x - 1} = \\ &= \frac{x}{x - 1} [(x^n + 2x^n - 3x^n + \dots + nx^n) - (1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1})]. \end{aligned}$$

A zárójel első része $n(n+1)x^n/2$, a levonandó S' összeg pedig az előbbihez hasonlóan alakítható:

$$\begin{aligned} S' &= 1 + \\ &+ x + x + \\ &+ x^2 + x^2 + x^2 + \\ &+ \dots + \\ &+ x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} = \\ &= \frac{x^n - 1}{x - 1} + \frac{x(x^{n-1} - 1)}{x - 1} + \dots + \frac{x^{n-1}(x - 1)}{x - 1} = \\ &= \frac{1}{x - 1} [nx^n - (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})] = \frac{1}{x - 1} \left[nx^n - \frac{x^n - 1}{x - 1} \right] = \\ &= \frac{nx^n}{x - 1} - \frac{(x^n - 1)}{(x - 1)^2}. \end{aligned}$$

Így az eredeti kifejezés:

$$S = \frac{n(n+1)x^{n+1}}{2(x-1)} - \frac{nx^{n+1}}{(x-1)^2} + \frac{x(x^n - 1)}{(x-1)^3}.$$

Halász Ákos (Kecskemét, Piarista g. IV. o. t.)