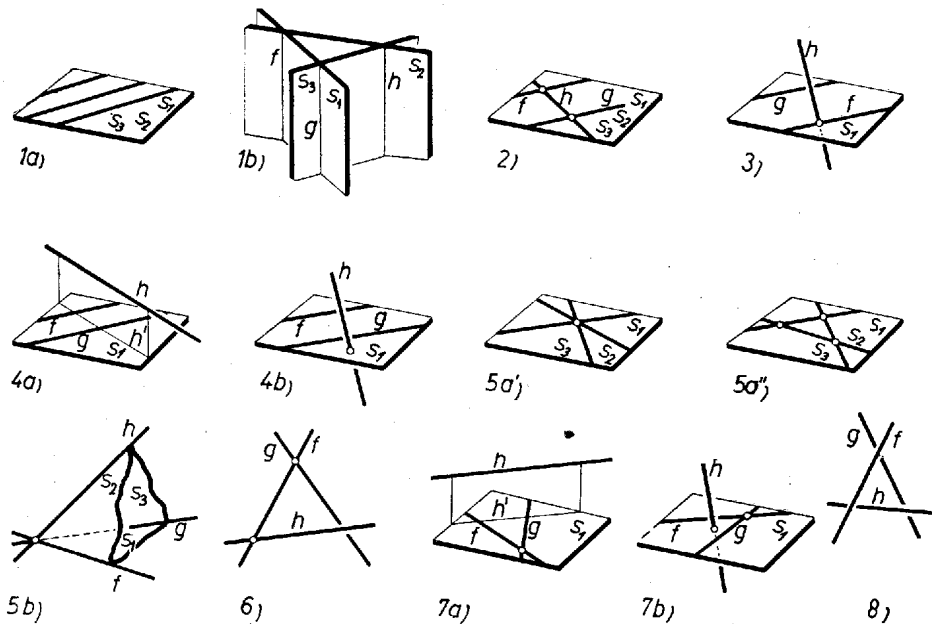


Felsorolásainkat olyan elv szerint kell szerkeszteniünk, amely biztosítja, hogy egyetlen, minőségileg a felsorolandóktól eltérő lehetőség se maradjon ki. Mindegyik rész-kérdésben három tételemet (egyenest vagy síkot, vegyesen is) kell vizsgálnunk. Ezek kölcsönös helyzetének jellemzésére három egyszerűbb kapcsolatot kell megadnunk: a belőlük képezhető három pár kölcsönös helyzetét. E célra áttekintjük az elem-párokra fennálló lehetőségeket. Két (különböző) egyenes egymáshoz képest párhuzamos (rövidítve: p), metsző (m) és kitérő (k) lehet. A lehetőségek p , m , k felsorolásában már azt a „rangsort” követtük, amely szerint a lehetőségeket majd rendszerezjük. Célszerű ugyanis p és m -et különleges, figyelmet érdemlő szempontnak venni, továbbá közülük (a síkbeli lehetőségek rangsorolásával) p -t választani elsőnek. p és m esetén a két egyenes meghatároz egy síkot, továbbá m esetén még egy pontot is (másodlagos, közvetve adott elemek), a harmadik tételelemnek ehhez képest mutatózó helyzetét további szempontként célszerű figyelembe venni, mert feltűnő minőségi különbségek mutatkozhatnak.

Egy f egyenes és egy S sík illeszkedő (i , azaz f benne van S -ben, másképpen: S átmegy f -en), párhuzamos és metsző helyzetben lehet, az m esetben meghatároznak egy pontot két sík pedig p és m helyzetű lehet, az m esetben meghatároznak egy egyenest. (Két vagy három p , vagy m egyenespárból származtatott, másodlagos síkkal kapcsolatban azonban az egybeesés (e) lehetőségét is tekintetbe kell vennünk, hasonlóan az adódott M metszéspontok egybeeső vagy különböző voltát is.)

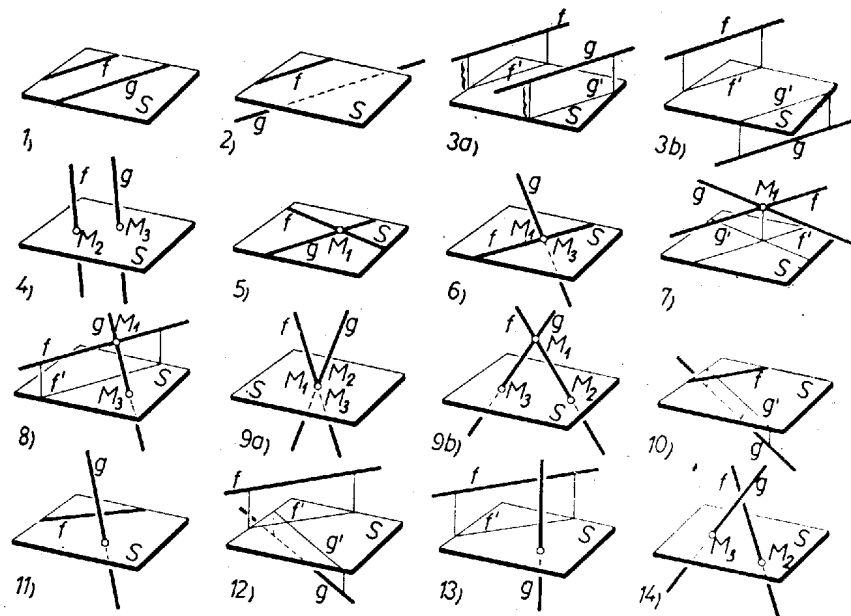


A helyzeteket elsősorban a megfelelő három betűvel jellemezzük, és ezt esetleg kiegészítjük a másodlagos elemekre vonatkozóan. A felsorolásokban a névsorszerkesztés elveit követjük, rövidítéseink említett rangsora szerint. Tulajdonképpen ezek a betűkombinációk vezetnek abban, hogy mely lehetőségeket kell egyáltalán megvizsgálnunk, ugyanis előkészítésül *formálisan* (a térbeli tartalomra való tekintet nélkül) kiszámítjuk a megvizsgálandó helyzeti (azaz betű-) kombinációk számát, és felírásuk után vizsgáljuk *tartalmi szempontból*, hogy valóban lehetséges térbeli helyzeteket jelentenek-e.

a) Legyenek az adott egyenesek f , g , h (ezek egyenrangúak, a betűkombinációból az előbb álló betűt az előbb álló egyenespárra vonatkoztatjuk). A p , m , k rövidítésekből 10 betűkombináció lehetséges ¹ közülük 8-nak létezik a térbeli megfelelője: 1) p, p, p (vagyis $f//g, f//h$ és $g//h$); 2) p, m, m ; 3) p, m, k ; 4) p, k, k ; 5) m, m, m ; 6) m, m, k ; 7) m, k, k ; 8) k, k, k . (A p, p, m és p, p, k kombinációk tartalmi szempontból lehetetlenek, mert ha $f//g$ és $f//h$, akkor $g//h$, tehát p, p után sem m , sem k nem állhat.)

Az 1), 2) és 5) esetek jelölésében 3–3 p vagy m betű áll, vagyis az egyenespárokból 3 jól látható sík származik; jelöljük ezeket s_1, s_2, s_3 -mal. Ezek a 2) esetben szükségképpen egybeesők, mert ha h az egymással párhuzamos f és g mindegyikét metszi, akkor benne fekszik s_1 síkjukban.

¹ 3-tagú (3-ad osztályú) ismétléses kombinációk 3-féle elemből, számuk $\binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$; természetesen e képlet nélkül is felsorolhatók.



Az 1) és 5) esetben a három sík közül vagy bármelyik kettő (tehát ismét mind a három) egybeesik, vagy egyik pár sem (az 1. ábrán² 1a, 5a' és 5a'', ill. 1b, 5b). A 3) és 6) esetek 2-2 származtatott síkja csak m helyzetű lehet, különben nem állhatna a harmadik helyen k betű. Végül a 4) és 7) esetekben a h egyenes p vagy m lehet s_1 -hez (ez azonban a kitérőségek miatt már nem annyira feltűnő különlegesség, csak a teljesség kedvéért említjük). – A metszéspontok változatai: az 5) eset három metszéspontja közül is vagy mind a három pár (azaz mind a három pont) egybeesik (5a'), vagy egyik sem (5a''). A 2) és 6) eset két metszéspontja csak különböző lehet, különben nem állhatna velük együtt p , ill. k betű. Ezekkel a „finomításokkal” a lehetőségek száma 13-ra emelkedik.

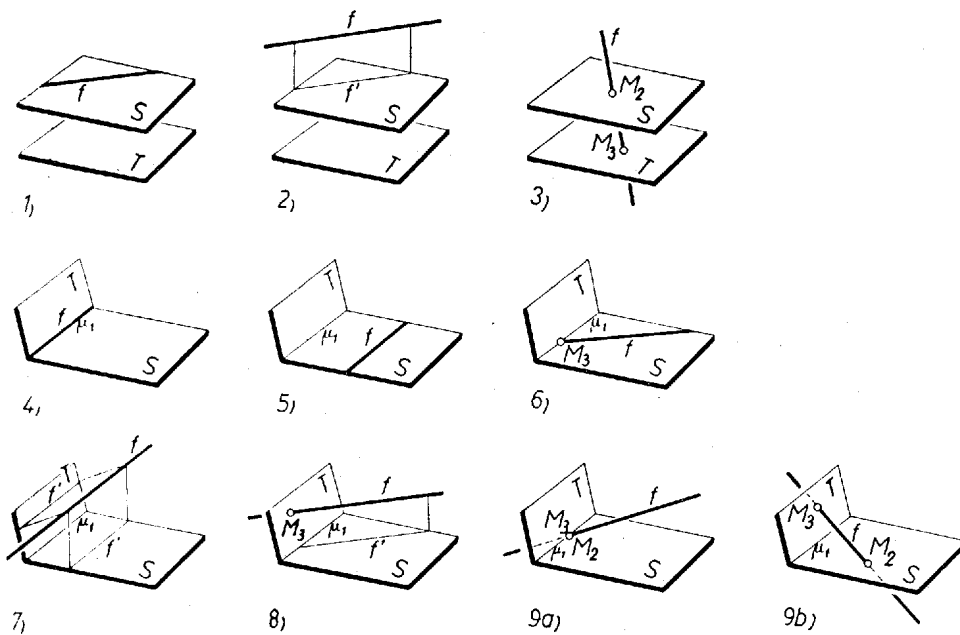
b) Legyenek az egyenesek f és g , és a sík S , kölcsönös helyzeteiket $f, g; f, S; g, S$ sorrendben soroljuk fel. A jellemző betűhármas első tagja ismét 3-féle lehet, további két tagja pedig i, p , vagy m , ezek összeállítására 6 lehetőség van: 3 „tisztá” pár (egyenlő betűkből) és 3 „vegyes” (rangsorba szedve), így $3 \cdot 6 = 18$ lehetőségre kell gondolnunk. Ezek közül 4 lehetetlen: k, i, i (mert ha f is, g is benne fekszik S -ben, akkor nem lehetnek kitérők); m, i, p ; p, i, m és p, p, m (indokolásuk esetről-esetre a tartalom szerint végezhető). A fennmaradó 14 betűhármashoz valóban tartozik térbeli f, g, S helyzet: Felsorolásukon az f, g -vel esetleg meghatározott s_1 síknak S -hez viszonyított helyzetét is feltüntetjük, úgyszintén az esetleges M_1, M_2, M_3 metszéspontokét is, ahol legalább két ilyen van. Ezekből a 3) és 9) esetekben adódik két változat, így a megkülönböztetett kölcsönös helyzetek száma $18 - 4 + 2 = 16$.

f, g	f, S	g, S	s_1, S	M -ek	M -ek	M -ek
1) p	i	i	e		5) m, i, i	10) k, i, p
2) p	i	p	m		6) m, i, m	11) k, i, m
3a) p	p	p	p		7) m, p, p	12) k, p, p
3b) p	p	p	m		8) m, p, m	13) k, p, m
4) p	m	m	m	$M_2 \neq M_3$	9a) m, m, m	14) k, m, m
					9b) m, m, m	
					m egybeesnek	$M_2 \neq M_3$
					m különbözők	

c) Legyen az adott egyenes f , a síkok S, T ; a felsorolás sorrendje: $S, T; f, S; f, T$. Itt az utolsó két betűre van 6 kombinációs lehetőség, az elsőre $2 : p$ és m , így 12 vizsgálatot kell végeznünk. Közülük 3 lehetetlen: p, i, i ; p, i, m , és p, p, m . További szempontok: S és T esetleges metszéspontjának μ_1 -nek f -hez képest való helyzete, továbbá f és S , valamint f és T esetleges M_2, M_3 metszéspontjának kölcsönös helyzete; mindkettő a 9) esetben ad két változatot, éspedig ugyanazt a kettőt, a megkülönböztetett lehetőségek száma: $12 - 3 + 1 = 10$.

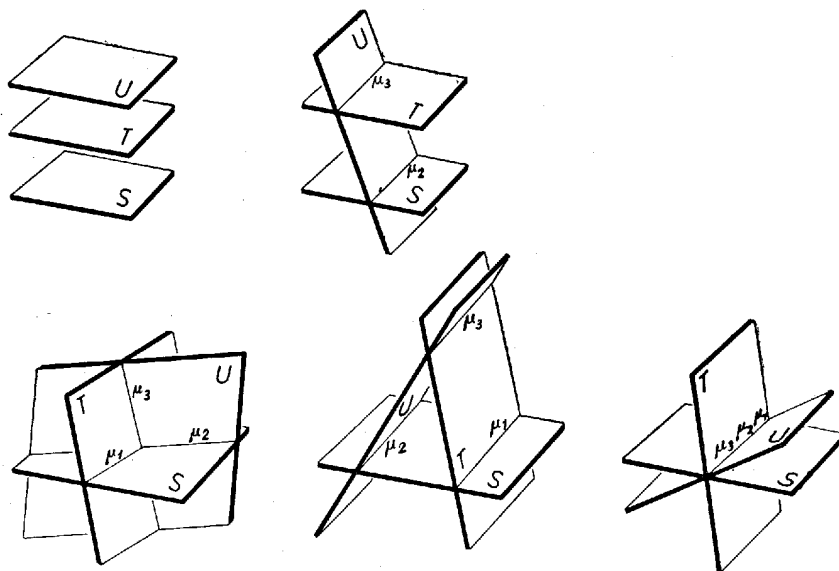
S, T	f, S	f, T	M -ek	μ_1, f	μ_1, f	M -ek
1) p	i	p		4) m, i, i	7) m, p, p	p
2) p	p	p		5) m, i, p	8) m, p, m	k
3) p	m	m	$M_2 \neq M_3$	6) m, i, m	9a) m, m, m	m
					9b) m, m, m	k
						$M_2 \equiv M_3$
						$M_2 \neq M_3$

² Az ábrákon a fehér köröcskék egyenesek, vagy egyenes és sík (másodlagos sík) metszéspontját jelölik; láthatósági viszonyokat is jelzünk, sík és egyenes párhuzamosságának érzékeltetésére az egyenesnek a síkon való vetületét is jelezzük.



d) Legyenek a síkok: S, T, U . Páronként a p és m lehetőségről lehet szó, a három párra pedig 4 betűkombinációról. Közülük a p, p, m lehetetlen, az m, m, m esetben viszont a μ_1, μ_2, μ_3 metszésvonalak kölcsönös helyzetére három lehetőség van: feladatunk a) részének 1b, 5b esete, továbbá mindhárom μ egybeesése; ennél fogva 5 lehetőség van.

	S, T	S, U	T, U	$\mu - k$
1)	p	p	p	
2)	p	m	m	$\mu_2 // \mu_3$
3a)	m	m	m	$\mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \mu_3$
3b)	m	m	m	$\mu_1 // \mu_2 // \mu_3$ a) rész 1b)
3c)	m	m	m	egy közös pontjuk van, a) rész 5b)



Ezzel a felsorolásokat befejeztük.

Mezei Ferenc (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t.)