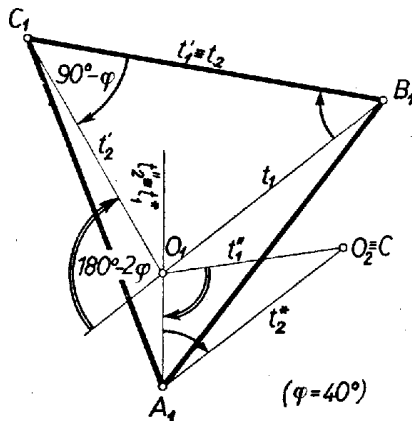


I. megoldás (csak a szerkesztés) Feladatunknak az 1958. évi Arany Dániel verseny haladó csoport II. fordulóján kitűzött 3. feladat¹ speciális esete, ott $\varphi = 60^\circ$. Másrészt $\varphi = 30^\circ$ esetén az ABC háromszöghöz megszerkesztett A_1, B_1, C_1 , pontokkal az $AC_1BA_1CB_1$ hatszögre teljesülnek az 1956. évi Arany Dániel verseny haladó csoport II. fordulója 3. feladatának² feltételei (2 – 2 szomszédos oldal egyenlő, az egyenlő szomszédos oldalak közti szögek 120° -osak), így az ott bebizonyított tétel szerint az $A_1B_1C_1$ háromszög szabályos; ezért adott A_1, B_1, C_1 -ből vagy egyáltalán nem szerkeszthető ABC , vagy számtalan sok szerkeszthető. A $\varphi = 30^\circ$ esetet ezért kizárjuk.

Az 1958. évi versenyfeladatra közölt II. megoldás gondolatmenetét átvéve megoldást kapunk, ha az ottani forgatások szögét, ill. a tükörtengelyek közti szöget az alábbiak szerint módosítjuk.



A C csúcsnak B_1 , majd C_1 végül A_1 (C -t A -ba, majd B -be, végül C -be vivő) forgatásai $180^\circ - 2\varphi$ szöggel végzendők az $A_1B_1C_1 = H_1$ háromszög körüljárásával ellentétes irányban (mert ott az 1. (és 5.) ábrán $ABC = H$ és H_1 körüljárása pozitív, CAB_1, ABC_1, BCA_1 -é viszont negatív); minden további forgás is így értendő. Ezért az 5. ábra t_1 -et t_2 -be, t_1' -et t_2' -be és t_1'' -et t_2'' -be vivő forgásainak szöge $90^\circ - \varphi$, a t_1 -et t_2 -be és t_1'' -et t_2'' -be vivő, O_1 körüli forgások szöge $180^\circ - 2\varphi$, végül a t_1'' -et t_2'' -be vivő forgási $\varepsilon = 270^\circ - 3\varphi$. Az O_2 körüli ε forgással ismét csak O_2 , kerül eredeti helyére (ott marad), tehát $C \equiv O_2$.

Mivel $0^\circ < \varphi < 90^\circ$, azért O_1 mindig létezik; ugyanígy O_2 is, hacsaknem t_1'' és t_2'' párhuzamosak vagy egybeesők. Ez csak akkor állhatna be, ha $180^\circ - 2\varphi$ és $90^\circ - \varphi$ kiegészítő szögek (a kizárt $\varphi = 30^\circ$ esete), ill. $\varphi = 90^\circ$ mellett, amikor a főlírt háromszögek értelmüket veszítik. Így ABC megszerkesztése mindig egyértelműen elvégezhető, tehát ha van, akkor egy megoldás van.

Czékus Laborc (Budapest, Toldy F. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. O_1A_1 a BC szakasz felező merőlegese, mert az idézett megoldás szerint B és C az O_1 és A_1 pontok mindegyike körüli forgással egymásba vihetők át, tehát egyenlő távolságra vannak O_1 -től és A_1 -től. Így O_1A_1 a CBA_1 háromszög tengelye, megszerkeszthetők a hozzá $90^\circ - \varphi$ szöggel hajló A_1B és A_1C száregyenesek, és közülük az veendő A_1C -nek, amelyet a H_1 körüljárásával egyező irányú, $180^\circ - 2\varphi$ szögű forgás visz át a másikba. Így kaphatjuk B_1C, B_1A, C_1A, C_1B -t is, és a megfelelő metszéspontok adják H csúcsait.

2. Megkaphatjuk H -t hasonlósági transzformációval is abból, hogy BC iránya merőleges O_1A_1 -re, és ugyanígy CA, AB irányát megszerkesztve akárhány a H -hoz hasonló helyzetű H^* háromszöget kaphatunk. Egy ilyenhez megszerkesztve a megfelelő A_1^*, B_1^*, C_1^* csúcsokat, a nyert H_1^* háromszög nyilván ugyancsak hasonló helyzetű H_1 -hez. H_1^* és H_1 -nek S hasonlósági pontjából mint középpontból H^* megfelelő nyújtásával kapjuk H -t.

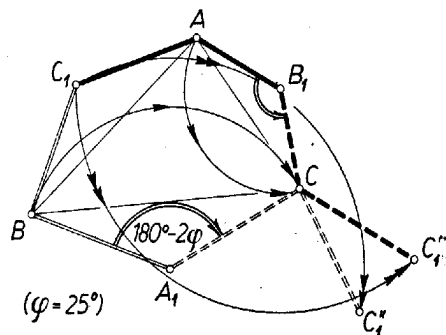
3. A szerkesztés a fentiek szerint akkor is elvégezhető, ha a kívánt egyenlő szárú háromszögek alapján fekvő φ, ψ, ω szögeknek egymástól különbözőknek kell lenniük.

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

II. megoldás: Szerkesszük meg a pozitív körüljárású $ABC = H$ háromszöghöz a C_1, A_1, B_1 pontokat (a H_1 háromszöget) és forgassuk el egyrészt a B_1AC_1 , háromszöget B_1 körül, másrészt az A_1BC_1 háromszöget A_1 körül úgy, hogy A , ill. B csúcsuk C -be jusson.

¹Lásd a megoldást KML. XVII. kötet 76–79. o. és *Lőrincz Pál* hozzáfűzött megjegyzéseit 128–134. o. (1958. november, ill. december)

²Lásd a megoldást KML. XIII. kötet 78. o. 1956. november.



A forgások szöge $\omega = 180^\circ - 2\varphi$, az oldalak fölé írt háromszögek új csúcsánál fekvő szög. Legyen C_1 új helyzete C'_1 , ill. C''_1 . Ekkor a $CC'_1C''_1 = H'$ háromszög egyenlő szárú, mert $CC'_1 = AC_1 = BC_1 = CC''_1$.

Meghatározzuk a H' alapján fekvő szögeket és azt, hogy C a $C'_1C''_1$ egyenes melyik partján fekszik. Első forgatásunk pozitív, a második negatív irányú, mert az $AC_1BA_1CB_1$ hatszög és vele H_1 is pozitív körüljárású (húzzunk vezérsugarat H bármely belső pontjából H , ill. a hatszög kerületét bejáró ponthoz). Így a $CC'_1 = f_1$ félegyenes C körül $CC''_1 = f_2$ -be átvivő pozitív forgás szöge: $\vartheta = C'_1CB_1\angle + B_1CA_1\angle + A_1CC''_1\angle = C_1AB_1\angle + B_1CA_1\angle + A_1BC_1\angle = (\alpha + 2\varphi) + (\gamma + 2\varphi) + (\beta + 2\varphi) = 180^\circ + 6\varphi$. Így ϑ nagyobb 180° -nál, ezért H' szárjai rövidebb forgással is átvihetők egymásba; a következőkben megmutatjuk C szerkesztését ϑ különböző értékei mellett.

Ha $\varphi < 30^\circ$, akkor $\vartheta < 360^\circ$, így f_2 -t f_1 -be $360^\circ - \vartheta = 180^\circ - 6\varphi (< 180^\circ)$, szögű pozitív forgás viszi át, ezért H' csúcsainak C''_1, C'_1, C sorrendje ad pozitív körüljárást, benne $C''_1\angle = C'_1\angle = 3\varphi (< 90^\circ)$. Így C szerkesztése: C_1 -nek B_1 körüli $+(180^\circ - 2\varphi)$ és A_1 körüli $-(180^\circ - 2\varphi)$ szögű forgatásával előáll C'_1 és C''_1 , ezek felező merőlegességéből C -t az a C''_1C száregyenes metszi ki, amely a $C''_1C'_1$ félegyenesből $+3\varphi$ szögű forgással áll elő. A -t és B -t hasonlóan kaphatjuk, de pl. A -t megadja a CB_1 -ből $+\varphi$ és B_1C -ből $-(180^\circ - 2\varphi)$ forgatással előálló félegyenesek metszéspontja is.

($\varphi = 30^\circ$ mellett $\vartheta = 360^\circ$, így $C''_1 \equiv C'_1$; ez is felhívna a figyelmet ennek az esetnek külön vizsgálatára.)

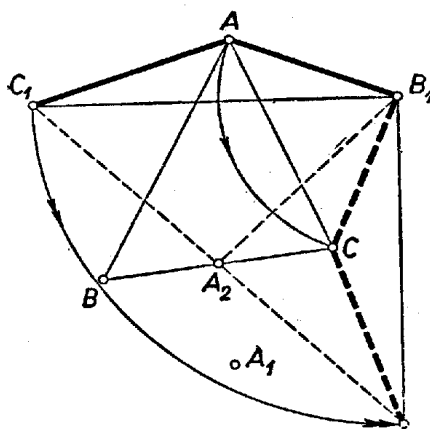
$30^\circ < \varphi < 60^\circ$ mellett $360^\circ < \vartheta < 540^\circ$, így f_1 -et C körül f_2 -be átviszi a $(0^\circ <)\vartheta - 360^\circ = 6\varphi - 180^\circ (< 180^\circ)$ szögű forgás, H' -nek a $C'_1C''_1C$ körüljárása pozitív, az alapon fekvő szögek nagysága $[180^\circ - (6\varphi - 180^\circ)]/2 = 180^\circ - 3\varphi (< 90^\circ)$.

$\varphi = 60^\circ$ mellett (a versenyfeladat esete) $\omega = 60^\circ$ és $\vartheta = 540^\circ = 360^\circ + 180^\circ$, így H' egyenes szakasszá fajul, C felezőpontja $C'_1C''_1$ -nek.³

$60^\circ < \varphi < 90^\circ$ mellett $540^\circ < \vartheta < 720^\circ$, f_1 átjut f_2 -be a $(0^\circ <)\vartheta - 360^\circ = 540^\circ - 6\varphi (< 180^\circ)$ forgással is, H' körüljárása ismét a C''_1, C'_1, C sorrendben pozitív, az alapon $[180^\circ - (540^\circ - 6\varphi)]/2 = 3\varphi - 180^\circ (< 90^\circ)$ nagyságú szögek vannak.

A fentiek alapján φ minden figyelembe veendő értéke mellett megszerkeszthetjük C -t.

A speciális $\varphi = 45^\circ$ esetben $2\omega = 180^\circ$, ez a különleges érték módot nyújt egyszerűsítésre, pl. C''_1 mellőzhető.



Így ugyanis C_1B és CC'_1 a C_1A -hoz képest -90° , ill. $+90^\circ$ -kal vannak elfordulva, tehát párhuzamosak. Ezért a $C_1BC'_1C$ négyszög paralelogramma, ismert $C_1C'_1$ átlójának A_2 felezőpontja megadja az ismeretlen BC átló (azaz oldal) felezőpontját. Sőt C'_1 -t is mellőzhetjük, mert ez esetben $C_1C'_1B_1$ egyenlő szárú derékszögű háromszög (átfogója $C_1C'_1$), ezért ugyanez áll $B_1C_1A_2$ -re is (átfogója B_1C_1), tehát A_2 -t az adott B_1C_1 oldal fölé befelé írt egyenlő szárú derékszögű háromszög harmadik csúcsaként egyszerűbben kapjuk. Ugyanígy szerkesztjük CA és AB -nek B_2, C_2 felezőpontját, ezekből pedig H -t. (A háromszögek befelé szerkesztendőek, ugyanis a B_1C_1 -et B_1A_2 -be vivő forgás pozitív, mert fele a C'_1 -t előállító forgásnak, és arról láttuk, hogy pozitív – akárcsak a B_1C_1 -ből B_1A_1 -be vivő forgás.)

³ A versenyfeladat 1. ábráján A_2, B_2 , megfelel C'_1, C''_1 -nek, mert pl. a C_1 körüli -60° -os forgással B_1 ugyanoda jut, mint B_1 , a C_1 körüli $+60^\circ$ -os forgással.

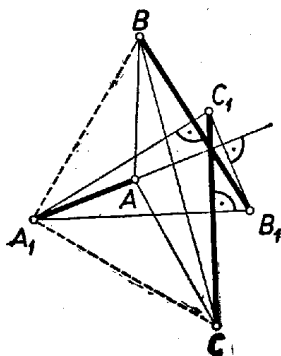
A fentiek szerint az $A_2B_2C_2 = H_2$ háromszög középháromszöge H -nak, tehát hasonló helyzetűek, akárcsak a $\varphi = 60^\circ$ esetben (csak a nagyítási arány más). Itt is van olyan felvétel (pl. ha H_1 szögei: $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, amelyben A_1, B_1, C_1 a kész H -hoz képest nem a kifelé, hanem a befelé írt megfelelő háromszögek csúcsainak bizonyulnak, és ilyenkor is H_2 és H a H_1 -gyel ellentétes körüljárásúak. Ebből az idézett cikk gondolatmenetét mindenben követve annak feltételül, hogy H_2 a H_1 -gyel azonos körüljárásúnak adódjék, ezt kapjuk:

$$4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma > \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma$$

(a mintabeli $\sqrt{3}$ számok helyén mindenütt 1 áll). Ezt az említett példa ($30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$) nem teljesíti: $\sqrt{3}$ nem nagyobb, mint 2.

Arató Péter (Kaposvár, Táncsics M. g. IV. o. t.)

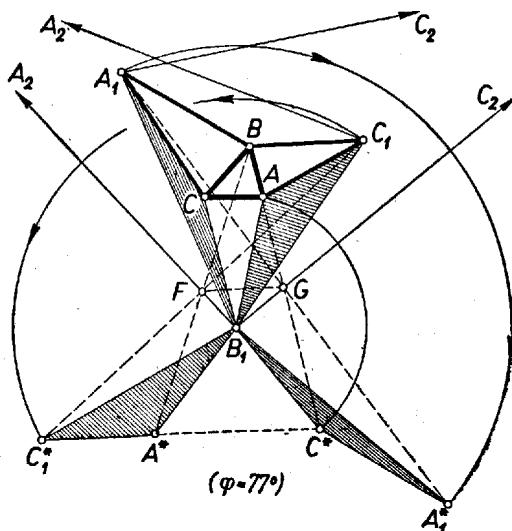
Megjegyzés. $\varphi = 45^\circ$ esetén H csúcsait forgatások nélkül úgy is megkapjuk, ha H_1 mindegyik magasságára a csúcstól a szemben fekvő oldal felé felmérjük a szemben fekvő oldalt, pl. A_1 -ből a B_1C_1 felé, rá merőlegesen felmért B_1C_1 szakasz végpontja A .



Valóban, így pl. az A_1B_1B és CC_1A_1 háromszögek egybevágók, hiszen $A_1B_1 = CC_1$, $B_1B = C_1A_1$ és $A_1B_1B \sphericalangle = CC_1A_1 \sphericalangle$, mert merőleges szárú hegyes szögek (a magasságszakasz a megfelelő oldalszakasszokkal hegyes szöget zár be). A két oldalpár merőlegessége folytán a BA_1 és A_1C harmadik oldalak is merőlegesek, másrészt az egybevágóság folytán egyenlők, így A_1 valóban a BC átfogó fölé valamelyik oldalra szerkesztett egyenlő szárú derékszögű háromszög harmadik csúcsa.

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

III. megoldás: Forgassuk el a B_1C_1A háromszöget B_1 körül $+2\varphi$ szöggel, amennyi a C_1BA háromszög C_1 -nél fekvő külső szöge; így az AC_1 oldal új $A^*C_1^*$ helyzete párhuzamos és egyirányú C_1B -vel. Ezért $C_1BC_1^*A^*$ paralelogramma, tehát az ismert $C_1C_1^*$ átló F felezőpontja a BA^* átlót is felezi.



Hasonlóan kapjuk a B_1A_1C háromszögnek B_1 körül -2φ szöggel $B_1A_1^*C^*$ -ba való elforgatása és az $A_1BA_1^*C^*$ paralelogramma révén BC^* -nak G felezőpontját. FG párhuzamos A^*C^* -gal, mert a BA^*C^* háromszög középvonala, tehát CA -val is, mert az ACA^*C^* négyszög egy a B_1 középpontú, B_1A sugarú körbe írt szimmetrikus trapéz. Eszerint FG megadja CA irányát. Hasonlóan kapjuk AB, BC irányát is, és belőlük az 1. megoldás 2. megjegyzésében leírt módon a keresett H -t.

$\varphi = 45^\circ$ esetén ez a szerkesztés is egyszerűsödik: $A^* \equiv C$ és $C^* \equiv A$ -ra, és tovább $F \equiv A_2, G \equiv C_2$ -re vezet; a II. megoldás szerkesztésével való azonosságot az magyarázza, hogy itt $2\varphi = \omega$. (L. P.)

Megjegyzések. 1. Láttuk, hogy H_1 oldalai fölé befelé $\varphi = 60^\circ$ és $\varphi = 45^\circ$ alapszögű egyenlő szárú háromszögeket szerkesztve a harmadik csúcsok által alkotott H_2 háromszög hasonló helyzetű az eredeti H -hoz, és így vele azonos körüljárású. Megmutatjuk, hogy ez a tény bármely $\varphi \neq 30^\circ$ hegyes szög esetén fennáll. Ehhez elég belátnunk H és H_2 , egy tetszés szerinti megfelelő oldalpárjának párhuzamosságát. – Valóban, F a $B_1C_1C_1^*$ egyenlő szárú háromszög $C_1C_1^*$ alapjának felezőpontja, a B_1 -nél levő szög 2φ , ezért $FB_1C_1 \sphericalR \varphi$, tehát A_2 a B_1F egyenesen fekszik, továbbá F a $B_1C_1A_2$ háromszög B_1A_2 szárához tartozó magasság talppontja. (Így lesz $B_1C_1A_2$ befelé írt háromszög, mert C_1^* , F és A_2 ugyanazon oldalán van B_1C_1 -nek, mint A_1 .) Ugyanígy C_2 a B_1G egyenesen van és G az $A_1B_1C_2$, háromszög B_1C_2 oldalához tartozó magasság talppontja. Mivel pedig a $B_1C_1A_2$ és $A_1B_1C_2$ háromszögek hasonlóak, azért $B_1A_2 : B_1C_2 = B_1F : B_1G$, ennélfogva A_2C_2 párhuzamos FG -vel és a fentebbiek szerint AC -vel, amit bizonyítani akartunk.

H_2 ezen tulajdonsága alapján tetszőleges φ -re elvégezhetjük az idézett cikknek megfelelő diszkusziót, alább ezt vázoljuk. $\sqrt{3}$ helyett $\text{tg } \varphi = \mu$ -vel a feladat követelményét kielégítő H háromszög létezésének feltétele:

$$(1) \quad (3\mu^2 + 1) \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma > \mu(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma).$$

Ezen egyenlőtlenség fennállásának *szükséges* feltétele, hogy H_1 szögei a

$$\frac{3\mu^2 + 1}{2} \sin \alpha - \mu - \mu(1 - \cos \alpha) = 0$$

egyenlet gyökei által meghatározott „középső” intervallumba essenek. Innen (egyszersmind $\text{ctg } \varphi = 1/\mu = \nu$ -vel is kifejezve

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{8\mu^2 \pm (9\mu^4 - 1)}{9\mu^4 + 10\mu^2 + 1}, \\ \cos \alpha_1 &= \frac{9\mu^4 + 8\mu^2 - 1}{9\mu^4 + 10\mu^2 + 1} = \frac{(9\mu^2 - 1)(\mu^2 + 1)}{(9\mu^2 + 1)(\mu^2 + 1)} = \frac{9\mu^2 - 1}{9\mu^2 + 1} = \frac{9 - \nu^2}{9 + \nu^2}, \\ \cos \alpha_2 &= \frac{-9\mu^4 + 8\mu^2 + 1}{(9\mu^2 + 1)(\mu^2 + 1)} = \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} = \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 + 1}. \end{aligned}$$

0° -hoz „közel járó” φ -vel ($\mu \approx 0$) α_2 „közel jár” 0° -hoz, mert $\cos \alpha_2 \approx 1$, α_1 pedig 180° -hoz, mert $\cos \alpha_1 \approx -1$; és hasonlóan 90° -ot megközelítő φ -vel ($\nu \approx 0$) $\alpha_1 \approx 0^\circ$ és $\alpha_2 \approx 180^\circ$, vagyis a „középső” intervallum a H_1 szögeire majdnem minden értéket megenged. Ha viszont a diszkrimináns: $9\mu^4 - 1 = 0$, azaz $\mu = 1/\sqrt{3}$, $\varphi = 30^\circ$, akkor az intervallum egyetlen pontra zsugorodik össze: $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = 1/2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 60^\circ$, ennél – mint tudjuk – H_1 szögei sem kisebbek, sem nagyobbak nem lehetnek. Mennél távolabb van φ a „kritikus” 30° értéktől (akár felette, akár alatta), annál tágabb határok között változtatható az adott H_1 alakja. $\varphi = 45^\circ$ -ra a határok $\cos \alpha_1 = 4/5$ -ből $\alpha_1 \approx 36,9^\circ$ és $\cos \alpha_2 = 0$ -ból, $\alpha_2 = 90^\circ$.

Végül α -val H_1 legkisebb szögét jelölve (1) fennállásinak *elégséges* feltételeként (a cikk jelöléseivel) az

$$f(\alpha, \beta - \gamma)_{\beta - \gamma - 180^\circ - 3\alpha} = 2 \sin^2 \alpha [(3\mu^2 + 1) \sin \alpha \cos \alpha - \mu(\sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha)] > 0$$

egyenlőtlenségre jutunk. A bal oldal 0-helyei: $\text{tg } \alpha_1 = 3\mu$ és $\text{tg } \alpha_2 = 1/\mu$. Ezekből $\varphi = 30^\circ$ esetén $\alpha_1 = \alpha_2 = 60^\circ$, minden más esetben α_1 és α_2 egyike kisebb 60° -nál: Ha α (vagyis H_1 mindegyik szöge) nagyobb ennél, akkor H megszerkeszthető.

Lőrincz Pál

2. A $\cos 2\varphi = (1 - \text{tg}^2 \varphi)/(1 + \text{tg}^2 \varphi) = (1 - \mu^2)/(1 + \mu^2)$ azonosság alapján látjuk, hogy a közbülső intervallum egyik határa $\alpha_2 = 2\varphi$. Hasonlóan $3 \text{tg } \varphi = 3\mu = \text{tg } \psi$ jelöléssel $-\cos \alpha_1 = \cos(180^\circ - \alpha_1) = (1 - \text{tg}^2 \psi)/(1 + \text{tg}^2 \psi) = \cos 2\psi$ -ből $\alpha_1/2$ annak a szögnek a pótszöge, amelynek tangense 3-szorosa φ tangensének. A szükséges feltételt adó ezen eredményekhez az 575. gyakorlat⁴ általánosításában egyszerűbben jutottunk el; ott azonban kizárólag egyenlő szárú H_1 háromszögekről és elfajult H_2 -ről volt szó. Innen viszont (ti. az idézett cikk vizsgálataiból) a kérdésünkre megoldást adó bármely H_1 -ről többet tudtunk meg.

⁴Lásd ezen számban, 176. o.