

A sorozat tetszés szerinti sorszámú tagját csak akkor írhatjuk fel, ha a megadott tíz tagon felismerünk valamely képezési szabályszerűséget, és feltesszük, hogy ez a szabályszerűség bármely sorszámú tagra fennáll. Képezve sorozatunk különbségi sorozatát (minden tagnak az előtte állóhoz képest való megváltozását) minden páratlan sorszámú különbséget 6-nak, minden páros sorszámú különbséget 8-nak találunk. Így bármely két szomszédos különbség összege (minden tagnak az előtte álló másodikhoz képest való megváltozása) 14, eszerint sorozatunk páratlan és páros indexű tagjai külön-külön $d = 14$ különbségű számtani sorozatot alkotnak:

$$a_{2k-1} = 2 + 14(k-1) = 14k - 12,$$

(ugyanis $2k-1$ a k -adik páratlan természetes szám), másképpen, $2k-1 = n$, $k = (n+1)/2$ -vel;

$$a_n = 2 + 14 \frac{n-1}{2} = 7n - 5, \quad \text{ha } n \text{ páratlan};$$

és hasonlóan

$$a_{2k} = 14k - 6, \quad \text{másképpen } a_n = 7n - 6, \quad \text{ha } n \text{ páros.}$$

a_n kétféle kifejezését közös alakban is írhatjuk, ha egyrészt felhasználjuk, hogy két szám nagyobbika a számtani közepüktől ugyanannyival tér el „fölfelé”, mint amennyivel a kisebbikük „lefelé”, és pedig a két szám elféréseinek (különbségük abszolút értékének) felével, – másrészt azt, hogy az eltérés váltakozva $+$, $-$ jellel veendő, a $(-1)^n$ tényezővel fejezzük ki. Így bármely indexre

$$(1) \quad a_n = 7n - \frac{11}{2} - \frac{(-1)^n}{2}.$$

(Páratlan n -re növelnünk kell, mert $-5 > -6$, ezért van $(-1)^n$ előtt mínuszjel.)

Ha n páros, $n = 2k$, akkor az összegben mindkét sorozatból $n/2 = k$ számot veszünk, így a páratlan, ill. páros indexű tagok összegét S' , ill. S'' -vel jelölve

$$S_{2k} = S'_k + S''_k = \frac{k}{2}(2 + a_{2k-1} + 8 + a_{2k}) = \frac{k}{2}(28k - 8) = 14k^2 - 4k;$$

$n = 2k - 1$ -gyel pedig k páratlan és $k - 1$ páros indexű tagot adunk össze:

$$\begin{aligned} S_{2k-1} &= S'_k + S''_{k-1} = \frac{k}{2}(2 + a_{2k-1}) + \frac{k-1}{2}(8 + a_{2k-2}) = \\ &= (7k^2 - 5k) + (7k^2 - 13k + 6) = 14k^2 - 18k + 6. \end{aligned}$$

(Rövidebben: $S_{2k-1} = S_{2k} - a_{2k}$). Másképpen, ismét $k = n/2$, ill. $k = (n+1)/2$ -vel

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{7n^2}{2} - 2n \quad \text{ha } n \text{ páros,} \\ S_n &= \frac{7n^2}{2} - 2n + \frac{1}{2} \quad \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{aligned}$$

Egy képletben összefoglalva:

$$(2) \quad S_n = \frac{7n^2 - 4n}{2} + \frac{1 - (-1)^n}{4}.$$

Windisch Andor (Budapest, József A. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A különbségi sorozatról tett megállapításunkat így is kimondhatjuk: a növekedés tagról-tagra átlagosan $(6+8)/2 = 7$, tehát a_n körülbelül: $a'_n = a_1 + 7(n-1)$, de a páros indexű tagokból 1-et le kell vonnunk (a páratlan indexűekből viszont semmit). A szükséges levonást felírhatjuk a $K_1 = [1 + (-1)^n]/2$ kifejezéssel, így $a_n = a_1 + 7(n-1) - K_1$ és ez azonos (1)-gyel. Hasonlóan: az 1, 2, 3, ... n sorozat páros tagjainak száma $K_2 = \frac{n}{2} - \frac{1 - (-1)^n}{4}$; és így

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) - K_2 \cdot 1 = \frac{n}{2}[2a_1 + 7(n-1)] - \frac{n}{2} + \frac{1 - (-1)^n}{4} = \\ &= \frac{n}{2}(7n - 4) + \frac{1 - (-1)^n}{4}, \end{aligned}$$

ez pedig azonos (2)-vel.

2. Eredményeinkhez úgy is eljuthatunk, ha a sorozat tagjait rendre úgy tekintjük, mint az $a_1 = 1,5$, $d = 7$ adatokkal meghatározott számtani sorozat és az $a_1 = 0,5$, $q = -1$ mértani sorozat megfelelő tagjaiból képezett összeget.

Katona Mária (Budapest, Szilágyi E. lg. I. o. t.)