

Állapítsuk meg $f(x)$ értelmezési tartományát! Elég ebben – és az ábrázolásban is – a $(0, 2\pi)$ intervallumra szorítkozni, mert $f(x)$, ahol egyáltalán értelmezve van, 2π szerint periodikus: $f(x + 2k\pi) = f(x)$ (k egész szám). Nincs értelmezve $f(x)$ ott, ahol $a)$ valamelyik nevező 0, $b)$ valamelyik tört negatív. Az $a)$ körülmény rendre a $\sin x = -1$, $\sin x = 1$, $\cos x = -1$, $\cos x = 1$ eseteket, vagyis az $x = 3\pi/2, \pi/2, \pi, 0$ helyeket zárja ki, a $b)$ körülmény viszont sehol sem következik be, mert az előbbi négy érték mellőzése után $-1 < \sin x < 1$, $-1 < \cos x < 1$, és így mind a négy tört számlálója és nevezője pozitív. Így $f(x)$ értelmezve van, ha $x \neq k\pi/2$, ahol k egész szám.

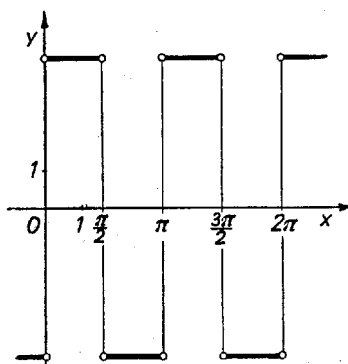
A gyökös kifejezéseket felírhatjuk gyökjel nélkül is, így viszont az abszolút érték jelével kell kifejezésre juttatnunk, hogy a négyzetgyökkel értelmezett (egyértékű) függvényen a nem negatív négyzetgyököt értjük. Pl.

$$\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} = \sqrt{\frac{(1 - \sin x)^2}{1 - \sin^2 x}} = \sqrt{\frac{(1 - \sin x)^2}{\cos^2 x}} = \left| \frac{1 - \sin x}{\cos x} \right| = \frac{1 - \sin x}{|\cos x|},$$

evvel és a hasonlóan adódó három átalakítással

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{1 - \sin x}{|\cos x|} - \frac{1 + \sin x}{|\cos x|} \right) \left(\frac{1 - \cos x}{|\sin x|} - \frac{1 + \cos x}{|\sin x|} \right) = \\ &= \frac{-2 \sin x}{|\cos x|} \cdot \frac{-2 \cos x}{|\sin x|} = \frac{4 \sin x \cos x}{|\sin x \cos x|} = 4 \cdot \frac{\sin 2x}{|\sin 2x|}. \end{aligned}$$

Eszerint ahol $\sin 2x > 0$, ott $|\sin 2x| = \sin 2x$, és így $f(x) = 4$; ez érvényes, ha $0 < 2x < \pi$, $0 < x < \pi/2$ és ha $2\pi < 2x < 3\pi$, $\pi < x < 3\pi/2$. Ahol pedig $\sin 2x < 0$, vagyis ha $\pi/2 < x < \pi$ és ha $3\pi/2 < x < 2\pi$, ott $|\sin 2x| = -\sin 2x$, és így $f(x) = -4$. ($\sin 2x = 0$ sehol nem áll be, mert éppen ezeket a helyeket zártuk ki.)



Így $f(x)$ -et a $(0, 2\pi)$ intervallumban négy az X -tengellyel párhuzamos nyitott egyenesszakasz ábrázolja.

Toldy-Ősz Mária (Budapest, Lórántffy Zs. úti lg. III. o. t.)