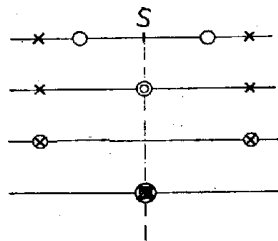


I. megoldás: Tekintsük az a, b, c, d számoknak törzsszámhatványok szorzatára bontott alakját, és képezzük ezekből a szükséges legnagyobb közös osztókat (tovább röviden LKO) is szorzat-alakban. Ebben minden p törzsszámnak a kitevője egyenlő azoknak a kitevőknek a legkisebbikével, amelyekkel p a megfelelő számok felbontott alakjában szerepel. Így a bizonyítás minden egyes p -re külön végezhető annak megmutatásával, hogy p a bizonyítandó egyenlőség két oldalán ugyanazon kitevővel szerepel. Legyen p kitevője a, b, c, d felbontásában rendre $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, így az ab és cd szorzatokban $\alpha + \beta$, ill. $\gamma + \delta$ és $ab = cd$ folytán $\alpha + \beta = \gamma + \delta$. A kitevők nagyságviszonya $2^3 = 8$ -féle lehet.



A kapott összefüggés ugyanis szemléletesen azt jelenti, hogy egyrészt α és β -nak, másrészt γ és δ -nak a számvonalon levő képei egymásnak ugyanazon S pontra, a számtani közepüket ábrázoló pontra tükörképei, tehát e két pontpár egyike „külső”, másika „belső” pontpár (az ábrán $\times$, ill. $\circ$ jellel; természetesen lehetségesek egybeesések, lásd az ábra változatait). Eszerint 2 lehetőség van arra, hogy a két kitevőpárnak melyike a külső, és további 2–2 lehetőség arra, hogy a pároknak melyik tagja a kisebb. γ és δ nagyságviszonyát azonban figyelmen kívül hagyhatjuk, mert c és d felcserélésével a bizonyítandó egyenlőség önmagába megy át, így feltehetjük, hogy $\gamma \leq \delta$. A maradék 4 nagysági sorrend mellett p -nek (a, c) -ben, (a, d) -ben és (a, b, c, d) -ben adódó κ, λ , ill. μ kitevőjét, végül a bizonyítandó egyenlőség bal oldalán adódó $\kappa + \lambda - \mu$ kitevőjét az alábbi táblázat tünteti fel. Az utolsó sor mutatja, hogy e kitevő egyenlő a jobb oldalon álló a -beli kitevővel, tehát az állítás helyes.

	$\alpha \leq \gamma \leq \delta \leq \beta$	$\beta \leq \gamma \leq \delta \leq \alpha$	$\gamma \leq \alpha \leq \beta \leq \delta$	$\gamma \leq \beta \leq \gamma \leq \delta$
κ	α	γ	γ	γ
λ	α	δ	α	α
μ	α	β	γ	γ
$\kappa + \lambda - \mu$	α	$(\gamma + \delta) - \beta =$ $= (\alpha + \beta) - \beta = \alpha$	α	α

Durst István (Szolnok, Verseghegy F. g. III. o. t.)

II. megoldás: Felhasználunk két a LKO-ra vonatkozó egyenlőséget:¹

$$(1) \quad ((l, m, \dots), (l', m', \dots)) = (l, m, \dots; l', m', \dots),$$

– vagyis két LKO-nak LKO-ja egyenlő valamennyi szóban forgó szám LKO-jával –

$$(2) \quad k(l, m, \dots) = (kl, km, \dots),$$

– vagyis adott számok LKO-jának k -szorosa egyenlő a k -szor akkora számok LKO-jával, és fordítva: az adott számok bármely közös tényezője a LKO jeléből kiemelhető. Így (a, c) -t átmenetileg e -vel is jelölve az idézett egyenlőségek, valamint a $cd = ab$ feltevés alapján

$$\begin{aligned} (a, c) \cdot (a, d) &= e(a, d) = (ae, de) = (a(a, c), d(a, c)) = ((a^2, ac), (ad, cd)) = \\ &= (a^2, ac, ad, cd) = (a^2, ac, ad, ab) = a(a, b, c, d). \end{aligned}$$

A bizonyítandó egyenlőség innen osztással adódik. Az osztásnak nincs akadály, mert $(a, b, c, d) \geq 1$.

Hammer Géza (Budapest, Toldy F. g. III. o. t.)

¹Lásd: Kürschák-Hajós–Neukomm–Surányi: Mat. Versenytételek I. 103. o. Tankönyvkiadó, 1955)