

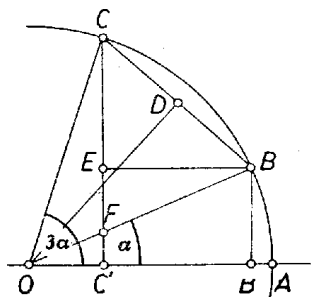
I. megoldás: $\sin 3\alpha$ kifejezhető $\sin \alpha$ -val: $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (2 \cos^2 \alpha - 1) \sin \alpha = (4 \cos^2 \alpha - 1) \sin \alpha = (3 - 4 \sin^2 \alpha) \sin \alpha$. Az utolsó zárójelbeli kifejezést a következőképpen zárhatjuk két határ közé: emeljük négyzetre a feltételből következő $0 < \sin \alpha < 1/2$ kettős egyenlőtlenséget, szorozzuk mindenütt -4 -gyel és adjunk hozzá mindenütt 3 -at:

$$0 < \sin^2 \alpha < 1/4; \quad 0 > -4 \sin^2 \alpha > -1; \quad 3 > 3 - 4 \sin^2 \alpha > 2.$$

Ezt a feltétel szerint pozitív $\sin \alpha$ -val szorozva és középen $\sin 3\alpha$ fenti kifejezését felismerve a bizonyítandó egyenlőtlenséget nyerjük.

Máthé Csaba (Győr, Révai M. g. III. o. t.)

II. megoldás: Alkossanak az O középpont körüli $r = 1$ sugarú körnek OA sugarával az OB , OC sugarak a pozitív forgási irányban α , ill. 3α szöget, legyen B , C vetülete OA -n B' ill. C' , (az OA szakasz belsejében, mert α és 3α hegyes szögek), így $BB' = \sin \alpha$, $CC' = \sin 3\alpha$; legyen továbbá az OBC egyenlő szárú háromszög O -ból húzott magassága OD , B vetülete CC' -n E (ugyancsak a CC' szakaszon), végül az $OC'BC$ konvex négyszög OB és CC' átlóinak metszéspontja F (mindkét átló belsejében).



Így egyrészt $\angle DOB = \alpha$, $BC = 2 \sin \alpha$, másrészt az OFC' és OBD derékszögű háromszögek révén $\angle CFB = \angle C'FO = 90^\circ - \alpha = \angle OBD = \angle FBC$, tehát az FBC háromszög egyenlő szárú. Így

$$\begin{aligned} 2 \sin \alpha &= BC = CF < CF + FC' = CC' = \sin 3\alpha = CE + EC' = CE + BB' < \\ &< CB + BB' = 2 \sin \alpha + \sin \alpha = 3 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Ezzel az adott kettős egyenlőtlenséget bebizonyítottuk.

Barabás György (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. $\alpha = 0^\circ$ és $\alpha = 30^\circ$ mellett $2 \sin \alpha = \sin 3\alpha$, eszerint az egyenlőtlenség első részének érvényessége nem terjeszthető ki az adott intervallumot magában foglaló hosszabb intervallumra. A második rész viszont – amint $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha < 3 \sin \alpha$ -ból látható – fennáll, ha $\sin \alpha > 0$, ennél fogva akkor is, ha $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Dániel Gábor (Budapest, Piarista g. IV. o. t.)