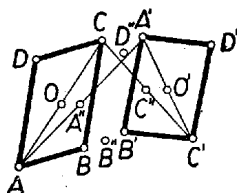


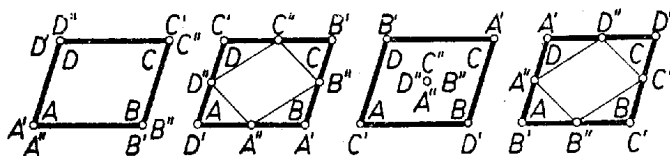
A 889. feladat megoldásaiban nem használtuk ki, hogy az adott paralelogrammák betűzésének körüljárási iránya megegyező-e vagy ellentétes, ezért a bizonyítások és az állítás érvényessége függetlenek az irányoktól. Sőt a *d)*, *e)* esetek szerint akkor is érvényes az állítás, amikor körüljárási irányról nem is lehet beszélni.<sup>1</sup>



1. ábra

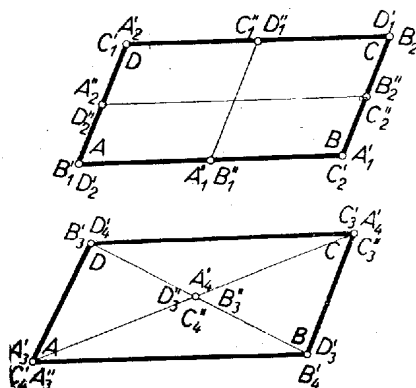
A továbbiakban ahol csak lehet, paralelogrammáinkat röviden  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}'$ ,  $\mathbf{P}''$ -vel jelöljük, az  $A$ ,  $A'$ ,  $A''$  és hasonló ponthármassok tagjait pedig általában  $X$ ,  $X'$ ,  $X''$ -vel. Az *a)*–*c)* esetekben feltehetjük, hogy  $\mathbf{P}$  a pozitív körüljárás irányában van betűzve, ezt jelképesen így fogjuk írni:  $\mathbf{P} > 0$ . Hasonló jelentése van az alábbiakban  $\mathbf{P}' > 0$ ,  $\mathbf{P}' < 0$ -nak.  $\mathbf{P}''$  betűzése 8-féle lehet (körüljárás a 4 kezdőpont valamelyikéből, 2 irányban).

Az *a)* eset  $\mathbf{P}' > 0$  betűzéseire hasonlatszerűen, tágabb értelemben azt mondhatjuk, hogy bennük az  $X'$ -k  $X$ -hez képest  $\mathbf{P}$  kerületén 0, 1,  $-1$ , vagy 2 „oldallal” elfordulnak.



2. ábra

Így rendre a négy  $XX'$  szakaszból mindegyiknek 0 a hossza, ill. mindegyik  $\mathbf{P} \equiv \mathbf{P}'$ -nek egy oldalával azonos, és pedig mindegyik más oldallal (két betűzés ilyen), ill. mindegyik egy átlóval azonos (2. ábra); – így  $\mathbf{P}''$  azonos rendre  $\mathbf{P}$ -vel, ill. (két esetben) a  $\mathbf{P}$  oldalfelező pontjaival meghatározott paralelogrammával, ill. elfajul  $\mathbf{P}$  középpontjává. –  $\mathbf{P}' < 0$  mellett 2 betűzésben a négy  $XX'$  szakasz egyike sem 0 hosszúságú, 2-ben pedig két  $XX'$  szakasz 0-val egyenlő.



3. ábra

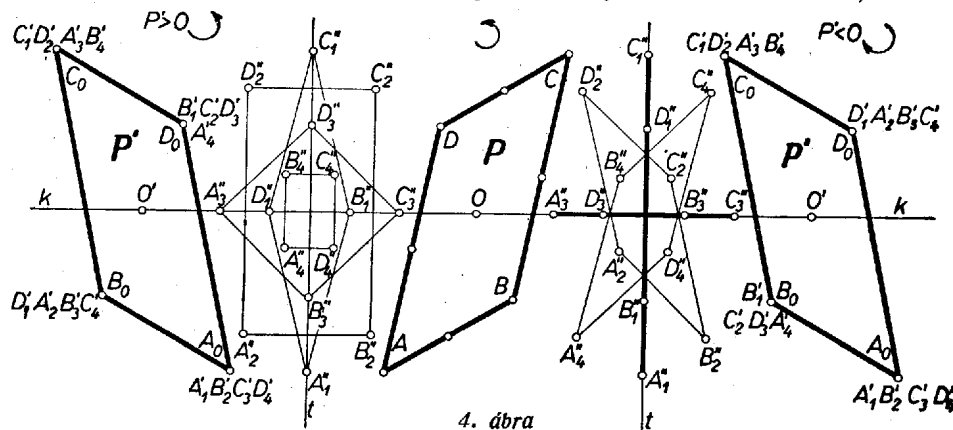
Az előbbi 2 esetben (3. ábra felső része, egyszerre vagy csak az 1-es, vagy csak a 2-es indexű  $X'$ ,  $X''$  pontokat tekintsük) mind a négy  $X''$  egy-egy oldalt felez, párosával ugyanazt az oldalt, tehát  $\mathbf{P}''$  a  $\mathbf{P}$ -nek valamelyik középponálává fajul el – mint *e)*-ben  $\mathbf{P}$ ; az utóbbi 2 esetben (3. ábra alsó része 3 és 4 indexszel)  $\mathbf{P}''$  egyik átlója azonos  $\mathbf{P}$  megfelelő átlójával, másik átlója pedig elfajultan  $O$ -ba esik.<sup>2</sup>

$\mathbf{P}''$  alakját és állását illetően ugyanezen eredményekre jutunk a *c)* esetekben, mert  $\mathbf{P}$ -nek a  $K$  középpontra való  $\mathbf{P}'$  tükröképét úgy is megkaphatjuk, hogy  $\mathbf{P}$ -t előbb a saját  $O$  középpontjára tükrözzük (így önmagába megy át, ez az *a)* eset), majd az  $OK$  irányban  $2OK$ -val eltoljuk.  $\mathbf{P}''$  nyolc alakja a felezések folytán az előző eredményekből  $OK$ -val való eltolás útján jön létre.

A *b)* esetben legyen a tengely  $t$ , és az  $X$  pont  $t$ -re való tükröképének állandó, a betűzéstől független jele  $X_0$ . Itt először a természetesebb  $\mathbf{P}' < 0$  betűzéseket tekintjük (tengelyes tükrözéssel a körüljárási irány ellentétesre fordul).

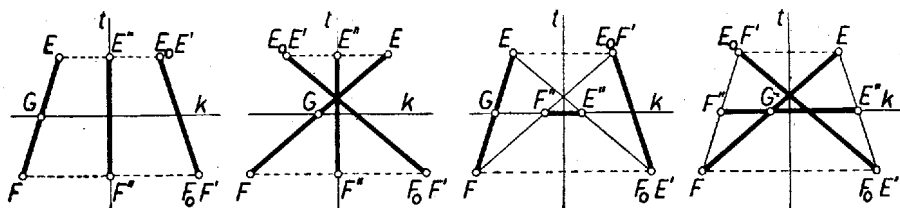
<sup>1</sup> Az érvényesség nem a tetszés szerinti pontnégyes oldalfelező pontnégyese által alkotott „paralelogrammára” vonatkozó állítás (I. megoldás) általános megfogalmazásán múlik – mint némely dolgozat állítja. – Arra a fogalmazásra, mint a megoldás is említi, egyező körüljárású betűzéseknél is szükség van, lásd 1. ábra.

<sup>2</sup>  $\mathbf{P}$ -nek hasonló elfajulását szó szerint nem tűztük ki vizsgálatra, de *d)* ezeket is magában foglalja, akárcsak *e)*-t is. – Szerk.



Ha minden  $X' \equiv X_0$ , akkor minden  $X''$  a  $t$ -n van, és így  $P''$  a  $t$  egy szakaszává fajul el (4. ábra jobb oldali 2/3 része az 1 indexszel, itt van a többi  $P' < 0$  betűzés is a 2–4 indexekkel, a  $P' > 0$  betűzések pedig a bal oldali 2/3 részben; a  $P$  idom az ábra két felére közös, így jobban látszik, hogy a nyolc  $P''$ -nek 32 csúcsa ugyanaz a 16 pont, más-más csoportosításban).

A továbbiak előkészítéséül tekintsük egy  $EF$  szakasszá elfajult  $P$  esetét (5. ábra) és mellőzzük azt a (még egyszerűbb) esetet, ha e szakasz merőleges  $t$ -re.



Így  $EF$  és a  $t$ -re való  $E_0F_0$  képe egy egyenlő szárú trapéz csúcsait adja, abban e két szakasz vagy az átlók, vagy a szárak szerepét játssza aszerint, hogy  $t$  metszi-e  $EF$ -et, vagy nem. Ha  $E' \equiv E_0$  és  $F' \equiv F_0$ , akkor  $E''F''$  az  $EF$ -nek  $t$ -n való vetülete;  $E' \equiv F_0$  és  $F' \equiv E_0$  esetén pedig  $E''F''$  a  $k$  középvonalnak a szárak, ill. az átlók közti szakasza, felezőpontja  $t$ -re esik, és  $E''F''$  hossza annyi, mint  $EF$ -nek  $k$ -ra való vetülete. – E segédétel alkalmazásaiban  $k$ -t úgy értelmezzük, mint az  $EF$  szakasz  $G$  felezőpontján átmenő,  $t$ -re merőleges egyenest.

Már most abban a  $P' < 0$  betűzésben, amelyben minden  $X'$  a  $P'$  idom  $X_0$ -ból induló átlójának másik végpontjába jut (3-as index), kérdésünk megoldható a segédétel kétszeri alkalmazásával:  $EF$ -nek  $AC$ -t, ill.  $BD$ -t véve így mindkétszer  $G \equiv O$ ,  $k = OO'$ ; eszerint  $A''C''$  és  $B''D''$   $k$ -ra esnek,  $P''$  ismét szakasszá fajul. – A hátralevő két  $P' < 0$  betűzés melletti  $P''$ -k nem mutatnak említendő érdekességet, egymásnak  $t$ - és  $k$ -ra tükörképei (2-es és 4-es index).

A  $P' > 0$  betűzések közül az 1-es és 3-as indexűben  $AC$  és  $BD$ -re alkalmazhatjuk segédételünket, a 2-es indexűben  $AB$  és  $CD$ -re, a 4-esben  $AD$  és  $BC$ -re ( $G$  szerepét átveszik  $P$  megfelelő oldalainak felezőpontjai). Mind a négy  $P''$ -nek  $t$  és  $k$  tengelye, az előbbi kettő rombusz, mert csúcsaik a tengelyeken vannak, az utóbbi kettő téglalap. Ez abból következik, hogy  $A_2''B_2'' = C_2''D_2''$  és  $A_2''D_2'' = B_2''C_2''$ , mint  $AB = CD$ , ill.  $AD = BC$ -nek  $k$  irányára való vetületei, és felezőpontjuk  $t$ -n van.

A  $d$ ) és  $e$ ) esetek – a várakozással ellentétben – nem mutatnak biztosan bekövetkező, említésre érdemes szabályszerűséget, az  $f$ ) esetben pedig  $P''$  nyilvánvalóan  $P$ -nek felére kicsinyített képe,  $P'$ -nek  $O'$  „középpontjából” szerkesztve.

Náray Miklós (Budapest, Széchenyi I. g. IV. o. t.)

**Megjegyzés.** Többen félreértették a feladat szövegét (amely valóban kissé „szokatlan”, diszkusszió-jellegű kérdéseket tett fel), pl. a második mondatban felsorolt  $a$ )– $f$ ) esetekben rendre újra és újra bizonyították a 889. feladatban már bebizonyított tételt. Nemcsak hogy lehet választ adni a szöveg első mondatára a második mondat nélkül, hanem csak így lehet. A második mondat új irányú kérdést vet fel. Az első mondatra adott válasz nem teszi a tételt általánosabban érvényessé, hanem a vizsgálatban tisztázódik, jobban tudatosodik számunkra a tétel érvényességi köre. Hasonló a céljuk, de más irányban az  $a$ )– $f$ ) kérdéseknek, olyan esetek felsorolásával, amelyekre legtöbbször „nem is gondoltak volna”. (Pedig a lehetőségeket nem is meríthetjük ki; nem tekintettünk pl. forgatásokat  $P$  és  $P'$  között, nem gondoltunk a térre, pedig  $P$  és  $P'$  síkjai különbözők is lehetnek, stb.; másrészt nem vizsgáltuk a tétel megfordítását.)

Az egyszerű és érdekes 889. feladattal kapcsolatban egyrészt arra kívántunk rámutatni, hogy amikor kérdéseket – szokás szerint – egyetlen ábrához kapcsolódva vizsgálunk meg, mennyi lehetőség marad rejtve előlünk; másrészt arra, hogy a matematikában nemcsak számítási, szerkesztési, bizonyítási feladatok lépnek fel, hanem néha bizonyos tényeket: alakokat, elfajulásokat, helyzeteket, kapcsolatokat le is kell írunk. Ilyesmik voltak azok, „amiket  $P''$ -ről mondhattunk.”