Az 539. gyakorlatban láttuk, hogy az x_n, y_n számpárok kielégítik az $y^2 = 2x^2 + 1$ egyenletet, vagyis teljesül $y_n^2 = 2x_n^2 + 1$. Innen a jobb oldal csökkentésével $y_n^2 > 2x_n^2$ majd $y_n > \sqrt{2} \cdot x_n$ (mert mindkét oldal pozitív), így valóban $y_n : x_n > \sqrt{2}$. Eszerint az a_n eltérés pozitív.

Az értelmezés szerint $k = 1, 2, 3, 4$-re $x_k = 2, 12, 70, 408$, $y_k = 3, 17, 99, 577$, másrészt $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\ldots$, így az egymás utáni többletek: $a_1 = 0{,}085\,786\ldots$, $a_2 = 0{,}002\,453\ldots$, $a_3 = 0{,}000\,072\ldots$, $a_4 = 0{,}000\,002\ldots$ (6 tizedes jegyet írtunk ki, hogy a_4 első értékes jegyét még lássuk).

Az értelmezések szerint általában

$$a_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{x_{k+1}} - \sqrt{2} = \frac{4x_k + 3y_k}{3x_k + 2y_k} - \sqrt{2} = \frac{(4 - 3\sqrt{2})x_k + (3 - 2\sqrt{2})y_k}{3x_k + 2y_k} =$$

$$= \frac{(4 - 3\sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2})\dfrac{y_k}{x_k}}{3 + 2\dfrac{y_k}{x - k}} = \frac{(4 - 3\sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2})(\sqrt{2} + a_k)}{3 + 2\dfrac{y_k}{x_k}} <$$

$$< \frac{(3 - 2\sqrt{2})a_k}{3 + 2\sqrt{2}} = (3 - 2\sqrt{2})^2 a_k = (17 - 12\sqrt{2})a_k$$

(a nevezőt csökkentettük és igy a tört értékét növeltük, amikor y_k/x_k helyett a kisebb $\sqrt{2}$-t írtuk). Vegyük észre, hogy a_k együtthatója a legutóbbi alakban $12a_2 \approx 0{,}029\,4\ldots$, ez valóban kisebb 0,03-nál, $a_{k+1} < 0{,}03a_k$; ezzel az egyenlőtlenség helyes voltát bebizonyítottuk.

A keresett n-re $a_n < 10^{-10}$. Ez a most bizonyított egyenlőtlenség alapján teljesül, ha elértük, hogy $0{,}03 \cdot a_{n-1} < 10^{-10}$, ill. hogy a $0{,}03^2 \cdot a_{n-2}$, $0{,}03^3 \cdot a_{n-3}$, $\ldots$, $0{,}03^{n-1} \cdot a_1$ rendre nagyobb és nagyobb számok legnagyobbika is kisebb 10^{-10}-nél. Láttuk, hogy $a_1 < 0{,}09 = 10^2 \cdot 0{,}03^2$; másrészt $0{,}03 < 10^{-2} \cdot \sqrt{10} = 10^{-1{,}5}$, így $a_n < 10^{-10}$-hez elegendő, ha $a_n < 10^2 \cdot 0{,}03^{n+1} < 10^2 (10^{-1{,}5})^{n+1} = 10^{-(1{,}5^n - 0{,}5)} < 10^{-10}$, azaz $1{,}5n - 0{,}5 > 10$, $n > 7$. (Esetleg már kisebb n-re is teljesül.)

Mindezek szerint $\sqrt{2}$ értékét pl. az y_8/x_8 hányados révén racionális műveletekkel 10^{-10}-nél kisebb hibával megközelíthetjük.

Halász Gábor (Budapest, Rákóczi F. g. IV. o. t.)