

Legyen a sorozat különbsége d , tagjainak száma n , másrészt tegyük fel, hogy k tagja a sorozatnak, és sorszáma m . Ekkor nyilván $1 < m < n$, másrészt a feltevés folytán vagy $e < k < u$, vagy $e > k < u$; és

$$u = e + (n - 1)d, \quad k = e + (m - 1)d, \quad \text{így} \\ d = \frac{u - e}{n - 1} = \frac{k - e}{m - 1},$$

tehát az adott számokat a jobb oldalra gyűjtve

$$(1) \quad \frac{m - 1}{n - 1} = \frac{k - e}{u - e}.$$

Itt a bal oldalnak két természetes szám hányadosának kell lennie, eszerint k csak akkor lehet tagja a sorozatnak, ha a $(k - e)/(n - e)$ hányados is (1-nél kisebb) pozitív racionális szám. (A feltevésnél fogva ez a hányados biztosan 0 és 1 közé esik, de nem feltétlenül racionális.)

Fordítva, ha $e \leq k \leq u$, és egyszerűsítve

$$\frac{k - e}{u - e} = \frac{p}{q}$$

ahol p, q relatív prim természetes számok, $p < q$, akkor található – és pedig végtelen sok – olyan számtani sorozat, amelynek e, k és u tagjai. Ugyanis megadható a fentieknek megfelelő m, n számpár:

$$\frac{m - 1}{n - 1} = \frac{k - e}{u - e} = \frac{p}{q} = \frac{tp}{tq}$$

-ből $m = tp + 1, n = tq + 1$, ahol t bármely természetes szám.

Az adott számpéldákban a tagok száma is adva van, így $tq + 1 = 100$ -ből $tq = 99$, tehát a válasz csak akkor lesz igenlő, ha a $(k - e)/(u - e)$ hányados értékére olyan 0 és 1 közti racionális szám adódik, amelynek egyszerűsíthetetlen alakjában a nevező 99-nek (1-nél nagyobb) osztója: 3, 9, 11, 33, vagy 99. – Ez a követelmény az *a)* példában nem teljesül: $(k - e)/(u - e) = 342/999 = 38/111$, a *b)* példában viszont teljesül, mert

$$\frac{k - e}{u - e} = \frac{16\sqrt{3} - 12\sqrt{2}}{36\sqrt{3} - 27\sqrt{2}} = \frac{4(4\sqrt{3} - 3\sqrt{2})}{9(4\sqrt{3} - 3\sqrt{2})} = \frac{4}{9},$$

és $q = 9$ szerepel a megengedett nevezők között. (Mivel e hányados 0 és 1 közé esik, nem szükséges vizsgálnunk, hogy k közéje esik-e e -nek és u -nak.) Valóban $u - e = 99d = 36\sqrt{3} - 27\sqrt{2}$ -ből $d = (4\sqrt{3} - 3\sqrt{2})/11$, másrészt

$$\frac{4}{9} = \frac{44}{99} = \frac{m - 1}{n - 1}$$

-ből $m = 45$, és így a sorozat 45-ik tagja:

$$e + 44d = (81\sqrt{2} - 64\sqrt{3}) + \frac{44}{11}(4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) = 69\sqrt{2} - 48\sqrt{3} = k.$$

Kisvölcssey Jenő (Budapest, Piarista g. IV. o. t.).