

Legyen a téglalap oldalainak hossza x , y és írjuk a félkört és a háromszöget az x oldalak fölé. Mivel csak ugyanakkora k kerületű V -idomokat tekintünk, azért x és y közül csak egyik választható szabadon; legyen ez x , akkor

$$(1) \quad 2y + \left(\sqrt{2} + \frac{\pi}{2}\right)x = k \text{ből} \quad y = \frac{k}{2} - \frac{2\sqrt{2} + \pi}{4}x.$$

Így a terület

$$t = xy + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2\pi}{8} = \frac{kx}{2} - \frac{(4\sqrt{2} + \pi - 2)x^2}{8}.$$

x és y nem lehetnek negatívak, sőt $x = 0$ -val is értelmét veszti a feladat ($y = 0$ viszont még elfogadható), azért (1) figyelembevételével a terület x -nek

$$(2) \quad 0 < x \leq \frac{2k}{2\sqrt{2} + \pi}$$

értékeire van értelmezve. Átalakításaink céljára rövidítsük a $4\sqrt{2} + \pi - 2$ számot b -vel; látható, hogy $b > 0$. Így

$$t = -\frac{b}{8} \left(x^2 - \frac{4kx}{b} \right) = -\frac{b}{8} \left(x - \frac{2k}{b} \right)^2 + \frac{b}{8} \cdot \frac{4k^2}{b^2} = \frac{k^2}{2b} - \frac{b}{8} \left(x - \frac{2k}{b} \right)^2,$$

és ez akkor maximális, ha a kivonandó tag 0, vagyis $x_0 = 2k/b$. Ez pozitív, másrészt kisebb (2) jobb oldalánál, mert $b = 2\sqrt{2} + \pi + 2(\sqrt{2} - 1) > 2\sqrt{2} + \pi$, vagyis a maximum helye beletartozik az értelmezési tartományba. A maximális terület: $t_{\max} = k^2/2b = k^2/(8\sqrt{2} + 2\pi - 4)$.

A maximális területet adó x_0 természetesen egyenesen arányos k -val, így az $x_0/k = 2/b$ hányadost kizárólag a V -alakkal velejáró $\sqrt{2}$ és π számok határozzák meg. Ugyanez nyilván a legnagyobb területű V -idom bármely két hossz méretére is áll, számítsuk ki tehát y/x -et. x_0 -ból (1) szerint

$$y_0 = \frac{k}{2} - \frac{2\sqrt{2} + \pi}{4} \cdot \frac{2k}{b} = \frac{k}{2b} (b - 2\sqrt{2} - \pi) = \frac{x_0}{4} (2\sqrt{2} - 2) = \frac{x_0}{2} (\sqrt{2} - 1),$$

tehát

$$\frac{y_0}{x_0} = (\sqrt{2} - 1)/2 = 0,2071 \dots$$

Szatmári Gábor (Budapest, Piarista g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Az egyszerűnek adódott y_0/x_0 arányból a maximális területű V -idom alakja megszerkeszthető (de maga az idom az adott k -ból nem!).