

Akár közvetlen kiszámítással, akár annak felhasználásával, hogy minden n természetes számra¹

$$(1) \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

adódik, hogy a bal oldali törték értéke $441/25 = (21/5)^2$, ill. $784/36 = (28/6)^2$. Ugyanennyi a jobb oldali törték értéke is, mert közös nevezőre hozással és egyszerűsítéssel az

$$(2) \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \pm 2 = \frac{(a^2 + b^2 \pm 2ab)}{ab} = \frac{(a \pm b)^2}{ab}$$

azonosság-pár alapján² $(a+b)^2/(a-b)^2 = [(a+b)/(a-b)]^2$ alakúvá válnak és $a, b = 13, 8$, ill. $17, 11$ mellett $a+b = 21$, ill. 28 és $a-b = 5$, ill. 6 .

(1) alapján

$$\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{(n-1)^2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4(n-1)^2} = \left(\frac{n(n+1)}{2(n-1)} \right)^2,$$

ennélfogva (2)-re tekintettel a kívánt alak céljára azokat az a, b számokat kell meghatároznunk, amelyekre

$$a+b = n(n+1) \quad \text{és} \quad a-b = 2(n-1).$$

Ezek:

$$a = (n^2 + 3n - 2)/2, \quad b = (n^2 - n + 2)/2.$$

(Pontosabban; elég arányukat meghatározni.) Eszerint a kívánt alak:

$$\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{(n-1)^2} = \frac{\frac{n^2 + 3n - 2}{n^2 - n + 2} + \frac{n^2 - n + 2}{n^2 + 3n - 2} + 2}{\frac{n^2 + 3n - 2}{n^2 - n + 2} + \frac{n^2 - n + 2}{n^2 + 3n - 2} - 2}.$$

Mint hogy $n^2 + 3n - 2 = n(n+3) - 2$ és $n^2 - n + 2 = n(n-1) + 2$, és itt a szorzatok egyik tényezője páros, azért az utolsó alakban szereplő két-két hányados legalább 2-vel egyszerűsíthető.

Mayer Géza (Budapest, Rákóczi F. g. IV. o. t.)

¹ Bizonyítását lásd a 798. feladatban: KML. XV. kötet, 20. o. (1957 szeptember).

² Ha több, hasonló szerkezetű és csak számadatokban különböző több lépéses számítást kell végeznünk, célszerű ezt általában előkészíteni.