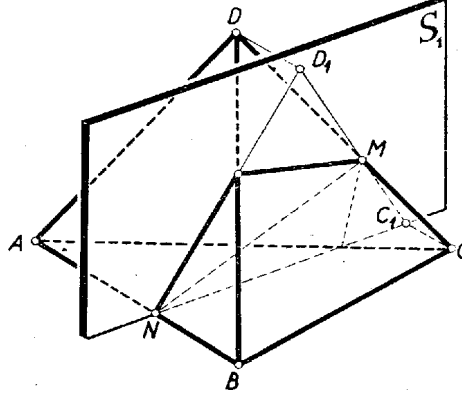


I. megoldás: Jelöljük a szóban forgó felező síkot S -sel. Vetítsük a tetraédert (merőlegesen) az M -en átmenő, AB -re merőleges S_1 síkra, legyen C, D vetülete C_1, D_1 , továbbá A és B egybeeső vetülete N .



CC_1 és DD_1 párhuzamosak AB -vel, ezért C_1, D_1 az ABC , ill. ABD síkban is benne vannak, tehát rajta vannak e síkoknak S_1 -gyel való C_1N, D_1N metszéspontján. Ennélfogva a C_1ND_1 szög méri az AB élnél levő lapszöveget. – Másrészt S és S_1 metszéspontja NM , és ez felezi a C_1ND_1 szöveget. Ugyanis M feltevésénél fogva egyenlő távol van az ABC és ABD lapsíkokon levő M_1 és M_2 vetületeitől, ezek S_1 -nek is pontjai, tehát C_1N , ill. D_1N -en vannak, ennélfogva M valóban egyenlő távol van a C_1ND_1 szög száraitól.

A CC_1M és DD_1M derékszögű háromszögek egy a CD -n átmenő és S_1 -re merőleges S_2 síkban fekszenek, M -nél fekvő szögek csúcsharminiai, ezért hasonlóak. Így

$$(1) \quad CM : MD = C_1M : MD_1.$$

(Ha S_1 átmegy CD -n, akkor $C_1 \equiv C, D_1 \equiv D$, és (1)-re nincs szükség.) A szögfelezőre vonatkozó tételnek a C_1ND_1 háromszögre való alkalmazásával

$$(2) \quad C_1M : MD_1 = C_1N : ND_1.$$

Itt. $CC_1 \parallel DD_1 \parallel AB$ folytán C_1N és D_1N megegyezik az ABC , ill. ABD háromszögnek az AB alaphoz tartozó magasságával, ennélfogva $AB/2$ -vel való szorzatuk e háromszögek területe:

$$(3) \quad C_1N : ND_1 = \frac{C_1N \cdot AB}{2} : \frac{ND_1 \cdot AB}{2} = t_{ABC} : t_{ABD}.$$

Most már (1), (2) és (3) egybevetése a bizonyítandó állítást adja.

A külső lapszög S_3 felezősíkjá CD -t csak C -n, vagy D -n túli meghosszabbításán metszheti. S_3 (amely átmegy AB -n és merőleges S -re) akkor és csak akkor *nem* metszi CD -t, ha párhuzamos vele. Ez az S_1 en való vetületben is megmutatkozik: S_3 nak S_1 -gyel való metszéspontja (amely átmegy N -en és merőleges NM -re) párhuzamos C_1D_1 -gyel. Így a C_1ND_1 háromszög NM szögfelezője merőleges C_1D_1 -re, tehát $C_1N = D_1N$, másképpen: ABC és ABD -nek AB -hez tartozó magasságai egyenlők, tehát $t_{ABC} = t_{ABD}$. – Fordítva, ha e területek egyenlők, akkor az S_1 -ben fekvő C_1ND_1 háromszög egyenlő szárú, tehát N -nél fekvő külső szögének f felezője párhuzamos C_1D_1 -gyel. Ennélfogva az f -en átmenő és S_1 -re merőleges S_3 párhuzamos CD -vel, mert ez S_2 ben fekszik, az pedig átmegy C_1D_1 -en és ugyancsak merőleges S_1 -re. – Ezek szerint S_3 és CD párhuzamosságához szükséges és elegendő, hogy $t_{ABC} = t_{ABD}$ legyen (amivel a feladat első része szerint együtt jár, hogy M felezi CD -t).

Ha már most $t_{ABC} \neq t_{ABD}$, akkor M' létezik. Ekkor az előbbi S_1 helyett az M' -n átmenő és AB -re merőleges S'_1 -t véve az ugyanúgy adódó C'_1, D'_1, N' vetületekkel a fenti megfontolás ismételtet. A változás csupán az, hogy $N'M'$ külső szögfelezője a $C'_1N'D'_1$ háromszögnek, azonban (2) megfelelője ekkor is érvényes. Így, ha M' létezik, akkor $CM' : M'D = CM : MD$.

Jelítai Árpád (Bp. XIV. ker., I. István g. IV. o. t.)

II. megoldás: Az aránypár helyességét az $MABC$ és $MABD$ tetraéderek K_1 , ill. K_2 köbtartalmának kétféleképpen való kifejezése útján is igazolhatjuk. E tetraédereknek M -ből húzott magasságai, mint M -nek az ABC és ABD lapsíkoktól való m távolságai, egyenlők, ennélfogva

$$(4) \quad t_{ABC} : t_{ABD} = m \cdot t_{ABC} : m \cdot t_{ABD} = 3K_1 : 3K_2.$$

Másrészt az A -ból húzott m_a magasságuk közös, mert az A -val szemben fekvő MBC , ill. MBD lapok egybeesnek BCD -vel. Így

$$(5) \quad 3K_1 : 3K_2 = m_a \cdot t_{MBC} : m_a \cdot t_{MBD} = t_{MBC} : t_{MBD}$$

Végül az MBC és MBD háromszögek B csúcsa és MC , ill. MD oldalegyenese közös, tehát közös a B -ből húzott m_b magasságuk is, ezért

$$(6) \quad t_{MBC} : t_{MBD} = \frac{m_b \cdot CM}{2} : \frac{m_b \cdot MD}{2} = CM : MD.$$

Most már az aránypár helyessége (4), (5) és (6) egybevetéséből adódik.

Tihanyi Ambrus (Bp., V., Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A (4) és (5) aránypárok egybekapcsolásával a 934. feladat állítására kapunk bizonyítást. Fordítva, a 934. feladatra támaszkodva is bizonyíthatjuk állításunkat.

2. A 934. és 935. feladatok állításai együtt a háromszög szögfelezője által a szemközti oldalon létrehozott metszetekre vonatkozó síkbeli tétel térbeli általánosításainak tekinthetők, egyszersmind lehetőséget nyújtanak lapszögfelező sík, f_a egy-egy pontjának síkbeli szerkesztéssel való kitűzésére.

3. (1) és (2) egybevetése azt adja, hogy NM a CND szöget is felezi.

4. Elég sok dolgozat a feladat második részében arra hivatkozott, hogy egyrészt CD és S_3 párhuzamosságából, másrészt S_3 és S merőlegességéből az következik, hogy CD és S merőlegesek. Ez téves, nem mindig igaz; vegyük pl. S_3 -nak egy vízszintes és függőleges lapokkal határolt téglatest alaplaját, CD -nek a fedőlap egyik átlóját, S -nek pedig bármelyik oldallapot.