

Előzetes megjegyzés. A beérkezett dolgozatok legnagyobb része trigonometriai úton bizonyítja az állítást. Közlünk egy ilyet, majd a II. és III. megoldásokon bemutatjuk, hogy elemi úton is célhoz juthatunk. Elemi utat a dolgozatoknak csak csekély hányadrésze követett.

I. megoldás: Vegyük hosszegységnek a körülírt kör átmérőjét, legyen továbbá BA_1 látószöge a nagyobb BA_1 ív pontjaiból x . Ekkor BA_5 látószöge a nagyobb BA_5 ív pontjaiból $36^\circ - x$, továbbá

$$\begin{aligned} BA_1 &= \sin x, \\ BA_3 &= \sin BA_5 A_3 \angle = \sin (72^\circ + x), \\ BA_5 &= \sin (36^\circ - x) = \sin (144^\circ + x), \\ BA_2 &= \sin BA_5 A_2 \angle = \sin (36^\circ + x) = -\sin (216^\circ + x), \\ BA_4 &= \sin BA_5 A_4 \angle = \sin (108^\circ + x) = -\sin (288^\circ + x). \end{aligned}$$

Ezekkel a bal és jobb oldal különbsége

$$\begin{aligned} BA_1 + BA_3 + BA_5 - BA_2 - BA_4 &= \sin x + \sin (72^\circ + x) + \sin (144^\circ + x) + \\ &+ \sin (216^\circ + x) + \sin (288^\circ + x) = (1 + \cos 72^\circ + \cos 144^\circ + \cos 216^\circ + \\ &+ \cos 288^\circ) \sin x + (\sin 72^\circ + \sin 144^\circ + \sin 216^\circ + \sin 288^\circ) \cos x. \end{aligned}$$

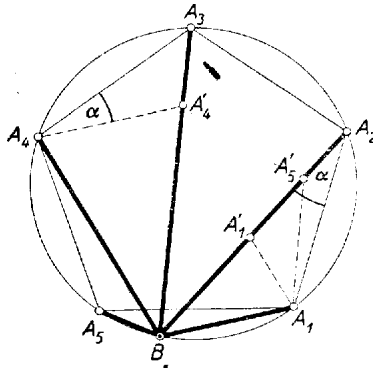
Felismerve, hogy a zárójelekben az egymás utáni szögek 72° -nak egymás utáni többszörösei, a különbség értéke ismert általános azonosságok alapján folytatólag:¹

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sin 324^\circ}{2 \sin 36^\circ} \right) \sin x + \frac{\sin 180^\circ \cdot \sin 144^\circ}{\sin 36^\circ} \cos x = 0.$$

Ezzel a bal és jobb oldal egyenlőségét bebizonyítottuk.

Klimó János (Kaposvár, Közgazd. Techn.. III. o. t.)

II. megoldás: A B pont helyzetének megválasztása folytán mindkét BA_3 ívhez tartozó középponti szög (röviden: a BA_3 ív) nagyobb 144° -nál, az A_5 -öt tartalmazó BA_4 ív kisebb 144° -nál, így a megfelelő húrokra is áll $BA_3 > BA_4$. Ugyanígy BA_2 nagyobb BA_1 és BA_5 mindegyikénél. Így BA_4 -et BA_3 -ra B -ből, BA_1 -et BA_2 -re B -ből és BA_5 -öt A_2B -re A_2 -ből ráérve az A'_4 , ill. A'_1 és A'_5 végpontok a BA_3 , ill. BA_2 szakaszon vannak. Húzzuk meg az $A_4A'_4$, $A_1A'_1$, $A_5A'_5$ szakaszokat (1. ábra).



1. ábra

Az A'_4A_4B és A'_1A_1B egyenlő szárú háromszögekben $A'_1BA_4 \angle = A_3BA_4 \angle = A_2BA_1 \angle = A'_1BA_1 = 36^\circ$, ezért $A'_4A_4B \angle = A_4A'_4B \angle = A_1A'_1B \angle = 72^\circ$. Az $A_1A_2A'_1$, ill. $A_3A_4A'_4$ háromszögekben az ötszög $A_1A_2 = A_3A_4$ oldalaival szemben 108° -os szögek fekszenek, mert ezek az utóbbi két szögnek mellékszögei. Másrészt $BA_2A_1 \angle = \alpha$ jelöléssel $A_5A_4B \angle = A_5A_2B \angle = A_5A_2A_1 \angle - BA_2A_1 \angle = 36^\circ - \alpha$, ezért $A'_4A_4A_3 \angle = A_5A_4A_3 \angle - A_5A_4B \angle - BA_4A'_4 \angle = 108^\circ - (36^\circ - \alpha) - 72^\circ = \alpha$. Így az $A'_1A_1A_2$ és $A'_4A_4A_3$ háromszögek egybevágók, tehát $A'_1A_1 = A'_4A_3$.

Egybevágók a $A_1A_2A'_5$ és A_1A_5B háromszögek is, mert A_2 , ill. A_5 csúcsuknál fekvő szögük és az azt bezáró oldalaik egyenlők, ezért $A_1A'_5A_2 \angle = A_1BA_5A_2 \angle = 144^\circ$. Ez a szög nagyobb $A_1A'_1A_2 \angle = 108^\circ$ -nál, ennél fogva A'_5 az A'_1A_2 szakaszon fekszik.

Most már az $A_1A'_5A'_1$ háromszögben $A_1A'_5A'_1 \angle = A'_5A_1A'_1 \angle = 36^\circ$, tehát $A'_1A'_5 = A'_1A_1 = A'_4A_3$.

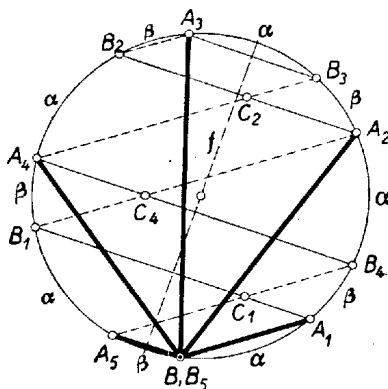
Mindezek alapján:

$$\begin{aligned} BA_2 &= BA'_1 + A'_1A'_5 + A'_5A_2 = BA_1 + A'_4A_3 + BA_5 = \\ &= BA_1 + BA_3 - BA_4 + BA_5, \end{aligned}$$

amiből a bizonyítandó állítás átrendezéssel adódik.

¹Lásd pl. *Faragó László*: Matematikai Szakköri Feladatgyűjtemény, 2. kiad. (1955) 52. o. (Középiskolai Szakköri Füzetek.)

III. megoldás: Legyen az $A_1A_2A_3A_4A_5$ ötszög (röviden P_a) tükörképe az A_5B húr f felező merőlegesére $B_1B_2B_3B_4B_5$ (röviden P_b), ahol $B_5 \equiv B$ (2. ábra).



2. ábra

P_b csúcsai a P_a köré írt k körön vannak, mert f a k -nak átmérője. P_a és P_b szabályos voltak folytán egymásba k középpontja körül való forgatással is átvihetők, pl. $A_1, A_2, \dots, A_5$ egy 72° -nál kisebb forgatással átvihetők B_4, B_3, B_2, B_5 -be, ez utóbbi csúcsok k -n rendre a rövidebb $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_5A_1$ ívre esnek. Így a rövidebb $A_5B_5, B_5A_1, A_1B_4, B_4A_2, \dots, A_4B_1, B_1A_5$ ívek váltakozva egyenlők, legyen röviden $\widehat{B_5A_1} = \widehat{B_4A_2} = \dots = \widehat{B_1A_5} = \alpha$ és $\widehat{A_5B_5} = \widehat{A_1B_4} = \dots = \widehat{A_4B_1} = \beta$. A P_a és P_b oldalai által k -ból lemetezett (rövidebb) ívek mindegyike egyenlő a $\alpha + \beta = 72^\circ$ -kal.

k -nak az f -re merőleges és így egymással párhuzamos A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 , A_4B_4 húrjai rendre egyenlők a bizonyítandó egyenlőségben szereplő BA_2 , BA_4 , BA_1 , BA_3 húrokkal, mert a megfelelő hurok végpontjai közé eső rövidebb ív hossza rendre $2\alpha + \beta$, $2\beta + \alpha$, α és $3\alpha + 2\beta$ vagy $2\alpha + 3\beta$ (aszerint, hogy $\alpha \leq \beta$, ill. $\alpha > \beta$). Eszerint elegendő azt megmutatnunk, hogy

$$A_3B_3 + A_4B_4 + A_5B_5 = A_1B_1 + A_2B_2.$$

Az A_2B_1 , A_3B_2 , A_4B_3 , A_5B_4 és A_1B_5 húrok ugyancsak párhuzamosak, mert két-két egymás utáni húr között két-két $\alpha + \beta$, α , $\alpha + \beta$, β hosszúságú ív van. Ezért, A_1B_1 , A_2B_2 , A_4B_4 -nek A_5B_4 , A_4B_3 , A_2B_1 -gyel való metszéspontját C_1 , C_2 , C_4 -gyel jelölve az $A_5B_5A_1C_1$, $B_1C_1B_4C_4$, $A_4C_4A_2C_2$, $B_2C_2B_3A_3$ négyszögek paralelogrammák. Ennélfogva

$$A_3B_2 + A_4B_4 + A_5B_5 = B_2C_2 + A_4C_4 + C_4B_4 + C_1A_1 = B_2C_2 + C_2A_2 + B_1C_1 + C_1A_1 = B_2A_2 + B_1A_1,$$

amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzés. A használt gondolatmenettel bármely páratlan oldalszámú szabályos sokszögre bizonyítható. A fent bebizonyított tétel következő általánosítása: ha az $A_1A_2 \dots A_{2n+1}$ szabályos sokszög ($n \geq 1$) köré írt kör kisebbik A_1A_{2n+1} ívének valamely pontja B , akkor

$$(1) \quad BA_1 + BA_3 + BA_5 \dots + BA_{2n+1} = BA_2 + BA_4 + \dots + BA_{2n}.$$

(Hogy páros oldalszámú sokszögre a gondolatmenet nem használható, ez azon múlik, hogy ekkor az $A_1A_2 \dots A_{2n}$ sokszög és ebből az $A_{2n}B \equiv A_{2n}B_{2n}$ húrnak f felező merőlegesére való tükrözéssel előálló $B_1B_2 \dots B_{2n}$ sokszög $4n$ csúcsából álló alakzat a kör középpontjára is tükrös (mert mindkét $2n$ -szög tükrös a középpontra), ezért az $A_{2n}B_{2n} = \beta$ ívvel szemben fekvő A_nB_n ív hossza ugyancsak β (páratlan oldalszám esetén viszont, mint könnyen belátható, az $\widehat{A_{2n+1}B_{2n+1}} = \beta$ -val szemben $\widehat{A_{n+1}B_{n+1}} = \alpha$ fekszik). Ezért minden az $A_{2n}B_{2n}$ -nel párhuzamos A_kB_k húr végpontjai között mindkét A_kB_k íven a β ívek száma páratlan, és így ezen húrok rendszerében általában nincs az (1) hal oldalán álló húrokkal egyenlő. Ugyanis a kört az (1) bal oldalán álló húrok bármelyikével kettévágva mindkét íven páros számú β ív van. – $2n$ oldalú szabályos sokszögre nem is igaz az (1)-nek megfelelő állítás.)

A fenti általánosítást kimondta és a Ptolemaios-tétel felhasználásával be is bizonyította *Bollobás Béla* (Bp. V., Apáczai Csere J. Gyak. Gimn. II. o. t.). A dolgozatok kisebb része magát az eredeti állítást is így bizonyította. Egy ilyen a következő.

IV. megoldás: Válasszuk hosszúságegységnek az ötszög oldalát és legyen átlóinak közös hossza d . Ha B az A_1A_5 ív valamelyik végpontja, akkor a bizonyítandó egyenlőség fennáll, mert mindkét kifejezés értéke $1 + d$.

Ha B az ív belső pontja (1. ábra), akkor a BA_3 , BA_2 , BA_4 húrokat kifejezhetjük BA_1 , BA_5 és d -vel úgy, hogy A_1 , B , A_5 -höz negyedik csúcsnak rendre A_3 -at, A_2 -t, A_4 -et vesszük és felírjuk e négyszögekre Ptolemaios tételét:

$$BA_3 = d \cdot BA_1 + d \cdot BA_5, \quad BA_2 = d \cdot BA_1 + BA_5, \quad BA_4 = BA_1 + d \cdot BA_5.$$

Ezeket a bal, ill. jobb oldalon behelyettesítve mindkét oldalon $(1+d)(BA_1 + BA_5)$ áll. – Ezzel a bizonyítást befejeztük.