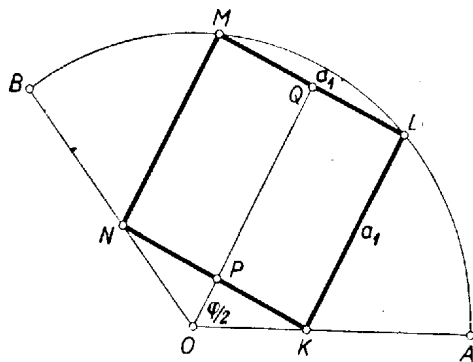
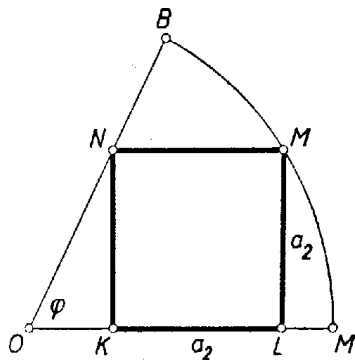


Megoldás: Kézenfekvőbb az olyan beírás (1. ábra), hogy a $KLMN$ négyzet PQ oldalfelezője az OAB körcikk szimmetriatengelyébe esik, de $\varphi \leq 90^\circ$ esetén olyan is lehetséges, hogy a körcikk ívére egy, a határoló sugaraira pedig két, ill. egy csúcsa esik a négyzetnek (2. ábra).¹



1. ábra



2. ábra

Eszerint miután majd e két lehetőség mellett felírtuk φ függvényeként a négyzet a_1 , ill. a_2 oldalából $t_1(\varphi)$, ill. $t_2(\varphi)$ területét, a $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$ szögekre meg kell vizsgálnunk, hogy t_1 és t_2 -nek melyike nagyobb. A nagyobb értéket adó kifejezés lesz a keresett függvény.

Az 1. ábra OQM derékszögű háromszögből a Pythagoras-tétel alapján, majd OP -t az OPN derékszögű háromszögből $\varphi/2$ -vel kifejezve

$$\begin{aligned} OM^2 = 1 &= OQ^2 + QM^2 = (OP + PQ)^2 + \frac{a_1^2}{4} = \left(NP \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + a_1 \right)^2 + \frac{a_1^2}{4} = \\ &= \left(\frac{a_1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + a_1 \right)^2 + \frac{a_1^2}{4} = \frac{a_1^2}{4} \left[\left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + 2 \right)^2 + 1 \right], \end{aligned}$$

és így

$$(1) \quad t_1 = t_1(\varphi) = a_1^2 = \frac{4}{\left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + 2 \right)^2 + 1}, \quad \text{ha } 0^\circ < \varphi \leq 180^\circ.$$

Hasonlóan a 2. ábra OLM derékszögű háromszögből

$$\begin{aligned} OM^2 = 1 &= OL^2 + LM^2 = (OK + a_2)^2 + a_2^2 = (NK \operatorname{ctg} \varphi + a_2)^2 + a_2^2 = \\ &= (a_2 \operatorname{ctg} \varphi + a_2)^2 + a_2^2 = a_2^2 [(\operatorname{ctg} \varphi + 1)^2 + 1], \end{aligned}$$

és így

$$t_2 = t_2(\varphi) = a_2^2 = \frac{1}{(\operatorname{ctg} \varphi + 1)^2 + 1}, \quad \text{ha } 0^\circ < \varphi \leq 90^\circ.$$

Elvben egyszerűbb volna a nagyobb területet t_1 és t_2 különbsége előjelét megvizsgálva kiválasztani. Mivel azonban t_1 és t_2 pozitív, és csak nevezőik változóak, így a másodikat 4-gyel bővítve az lesz a nagyobb, amelyekben a (módosítás utáni) nevező kisebb. Vizsgáljuk tehát ezek

$$k(\varphi) = \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + 2 \right)^2 + 1 - 4(\operatorname{ctg} \varphi + 1)^2 - 4$$

¹ Meg lehet mutatni, hogy más megfelelő beírási lehetőség nincs.

különbségének előjelét a két függvény értelmezési tartományának közös részében, vagyis ha $0^\circ < \varphi \leq 90^\circ$

Fejezzük ki $\operatorname{ctg} \varphi$ -t is $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = x$ -szel:

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}} = \frac{x^2 - 1}{2x},$$

így a különbség x függvényeként:

$$k(\varphi) = k_1(x) = (x+2)^2 - 4 \left(\frac{x^2 - 1}{2x} + 1 \right)^2 - 3 = \frac{1}{x^2}(-x^2 + 4x - 1) = \frac{f(x)}{x^2}.$$

Meg kell állapítanunk $k_1(x)$ -nek az új változó szerinti értelmezési tartományát. $0^\circ < \frac{\varphi}{2} \leq 45^\circ$ folytán $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = x \geq 1$; ezekre az x -ekre vizsgáljuk $k_1(x)$ -et. Előjele csak az $f(x) = -x^2 + 4x - 1 = 3 - (x-2)^2$ másodfokú függvény előjelétől függ. Ez pozitív a $2 - \sqrt{3}$ és $2 + \sqrt{3}$ közti x -ekre, minden más x -re negatív, vagy 0, azonban az előbbi érték nem tartozik bele $k_1(x)$ értelmezési tartományába. Így $k_1(x) = k(\varphi)$ egyszer megváltoztatja előjelét.

Eszerint t_1 és t_2 nagyságviszonya nem állandó, hanem egyszer ellentétesre fordul, éspedig $x = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = 2 + \sqrt{3}$ -nál; ekkor $\operatorname{ctg} \varphi = \sqrt{3}$, és így $\varphi = 30^\circ$, és $\varphi/2 = 15^\circ$. Valóban, $k_1(2 + \sqrt{3}) = k(30^\circ) = 0$, és $t_1(30^\circ) = t_2(30^\circ) = (5 - 2\sqrt{3})/13$.

A nagyságviszonyról előrebocsátottak értelmében $1 \leq x = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} < 2 + \sqrt{3}$ esetén, vagyis mivel a kotangens függvény csökkenő, $45^\circ \geq \varphi/2 > 15^\circ$, másképpen $90^\circ \geq \varphi > 30^\circ$ esetén $k_1(x) = k(\varphi)$ pozitív, tehát t_1 kisebb t_2 -nél, a körcikk ilyen nyílásszöge esetén a nemszimmetrikusan beírt négyzet területe nagyobb. – Viszont $x = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} > 2 + \sqrt{3}$, azaz $\varphi/2 < 15^\circ$ $\varphi < 30^\circ$ esetén az előjel és a nagyságviszony ellentétes, a szimmetrikusan beírt négyzet a nagyobb területű.

$\varphi > 90^\circ$ mellett csak az első beírási mód használható, akkor t_1 adja a keresett függvényt. – Mindezek szerint a keresett $t(\varphi)$ függvényt két képlettel így írhatjuk fel:

$$t(\varphi) = \begin{cases} \frac{4}{(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + 2)^2 + 1}, & \text{ha } 0^\circ < \varphi \leq 30^\circ \text{ és ha } 90^\circ < \varphi \leq 180^\circ, \\ \frac{1}{(\operatorname{ctg} \varphi + 1)^2 + 1}, & \text{ha } 30^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ. \end{cases}$$

$\varphi = 30^\circ$ -ra mindkét képlet érvényes.

Várady Gábor (Győr, Révai M. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy 90° -nál $t(90^\circ) = t_2(90^\circ)$ nagyobb, mint $t_1(90^\circ)$, és nagyobb szögekre $t(\varphi)$ ehhez a kisebb értékhez csatlakozik. Első pillantásra meglepő, hogy eszerint pl. 90° -os körcikkből nagyobb négyzetlemez lehet kivágni, mint 100° -osból; ne felejtjük el azonban azt a követelményt, hogy a négyzetlemez csúcsainak a körcikklemez kerületén kell lenniük.