

I. megoldás: Az (1) bal oldalának tényezői az x és y -nak szimmetrikus függvényei, várható tehát, hogy kifejezhetők $x + y$ és xy -nal, az elemi szimmetrikus függvényekkel. Valóban

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = (x + y)^3 - 3xy(x + y),$$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy,$$

így (2) figyelembevételével (1)-ből $xy = w$ -re kapunk másodfokú egyenletet:

$$(3) \quad (8 - 6xy)(4 - 2xy) = 64, \quad 3w^2 - 10w - 8 = 0.$$

Innen $w_1 = -2/3$, $w_2 = 4$.

Ezeket (2)-hez hozzákapcsolva x , y -t az

$$u^2 - 2u + w = 0$$

egyenlet gyökei adják, ahol u az x és y bármelyikét jelentheti. Ebből $u_1 = 1 \pm \sqrt{1 - w}$. Csak w_1 -gyel kapunk valós megoldást, a két gyökpár

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{5/3}, \\ y_1 = 1 - \sqrt{5/3}; \end{cases} \quad \text{és} \quad \begin{cases} x_2 = y_1, \\ y_2 = x_1. \end{cases}$$

Bencsik István (Bp. V., Eötvös J. g. III. o. t.)

II. megoldás: A (2) követelését így is mondhatjuk: x és y számtani közepe 1. Ez azt is jelenti, hogy az egyik ugyanannyival nagyobb 1-nél, mint amennyivel a másik kisebb 1-nél.

Az eltérést v -vel jelölve:

$$(4) \quad x = 1 + v, \quad y = 1 - v,$$

és ezeket (1)-be beírva v -re egyismeretlenes, redukálható negyedfokú egyenletet kapunk:

$$(2 + 6v^2)(2 + 2v^2) = 64,$$

$$(5) \quad 3v^4 + 4v^2 - 15 = 0.$$

Innen $(v^2)_1 = -3$, $(v^2)_2 = 5/3$. Valós v -értéket csak az utóbbiból kapunk, $v = \pm\sqrt{5/3}$ -dal a fenti x , y értékpárok adódnak.

Grünfeld Péter (Bp. IX., József A. gépip. t. III. o. t.)

III. megoldás: (2)-ből $y = 2 - x$ -et (1)-be helyettesítve x -re az

$$x^4 - 4x^3 + \frac{22}{3}x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{8}{3} = 0$$

negyedfokú egyenletet kapjuk. Itt az együtthatók teljesítik annak feltételét, hogy a bal oldal egy $x = z + \lambda$ alakú helyettesítéssel $z^4 + Az^2 + B$ alakra legyen hozható¹, ugyanis

$$a^3 - 4ab + 8c = -64 + \frac{352}{3} - \frac{160}{3} = 0,$$

és pedig λ megfelelő értéke: $\lambda = -a/4 = +1$. Az $x = z + 1$ helyettesítéssel lényegében ismét (5)-re jutunk.

Simonfai László (Bp. II., Rákóczi F. g. IV. o. t.)

¹ Az $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ függvény akkor és csak akkor írható egy $x = z + \lambda$ alakú helyettesítéssel $\varphi(z) = z^4 + Az^2 + B$ alakba, ha $a^3 - 4ab + 8c = 0$, és λ megfelelő értéke: $\lambda = -a/4$ (KML. XI. kötet 57. o., 656. feladat, 1955 október).