

I. megoldás: A második egyenlet gyökeit x_1, x_2 -vel jelölve az első egyenlet gyökei $x_1 + 1$ és $x_2 + 1$. Így a gyökök és az együttthatók összefüggései alapján az x_1, x_2, p és q ismeretlenekre négy egyenletet írhatunk fel:

$$(1) \quad x_1 + x_2 = -p,$$

$$(2) \quad x_1 x_2 = q,$$

$$(3) \quad x_1 + x_2 + 2 = p^2,$$

$$(4) \quad (x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1 = pq.$$

(1) és (2) figyelembevételével (3) és (4)-ből p és q -ra a következő egyenlet-rendszert kapjuk:

$$(5) \quad -p + 2 = p^2,$$

$$(6) \quad q - p + 1 = pq.$$

(5)-ből $p_1 = -2, p_2 = 1$, a (6)-ból átalakítással adódó

$$(6a) \quad (p - 1)(q + 1) = 0$$

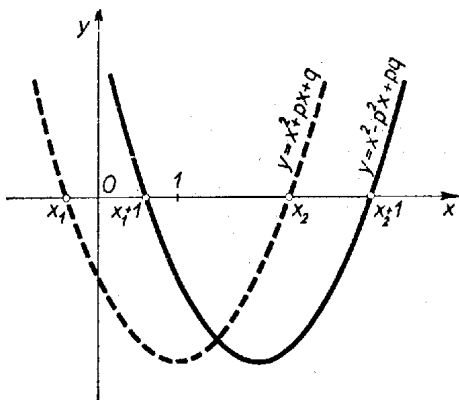
egyenletből pedig p_1 -gyel $q_1 = -1$, p_2 -vel viszont az egyenlet bármely q számra teljesül.

Az első esetben az adott egyenletek így alakulnak: $x^2 - 4x + 2 = 0$ és $x^2 - 2x - 1 = 0$, gyökeik $2 \pm \sqrt{2}$, ill. $1 \pm \sqrt{2}$, és ezek valóban teljesítik a követelményt.

Ugyanez áll a második esetben az $x^2 - x + q = 0$ és $x^2 + x + q = 0$ egyenletek $(1 \pm \sqrt{1 - 4q})/2$, ill. $(-1 \pm \sqrt{1 - 4q})/2$ gyökeire. Ezek akkor és csak akkor valósak, ha $1 - 4q \geq 0$, azaz $q \leq 1/4$.

Dániel Gábor (Bp. VIII., Piarista g. IV. o. t.)

II. megoldás: Az (5), (6) egyenletrendszerhez grafikus megközelítéssel is eljuthatunk. Az adott egyenletek hal oldalát mint másodfokú függvényt ábrázoló két parabola egyrészt egybevágó, mert x^2 együttthatójának abszolút értéke mindkettőben 1, másrészt egyforma állású, mert ezen együttthatók előjelben is egyeznek, mindkettőnek alul van a csúcsa.



Így egymásból (párhuzamos) eltolással is előállíthatók. Az eltolás nagysága a gyökökre, mint a parabolák és az X -tengely metszéspontjainak abszcisszáira előírt követelmény folytán éppen 1 egységnyi az X -tengellyel párhuzamosan, és pedig az első egyenlet bal oldalát ábrázoló parabola 1 egységgel jobbra van eltolva a másikhoz képest (l. az ábrát). Ekkor pedig az első egyenlet bal oldalán álló függvény $y = (x - 1)^2 + p(x - 1) + q = x^2 - (2 - p)x + (1 - p + q)$ alakban is felírható, és ez akkor és csak akkor azonos az $y = x^2 - p^2x + pq$ függvényvel, ha tagról tagra megegyeznek. Az (5), (6) rendszer éppen ezt, az elsőfokú tag együttthatójának, ill. az állandó tagnak egyenlőségét követeli.

Mezey Ferenc (Bp. II., Rákóczi g. III. o. t.)