

Hogy a fellépő logaritmusoknak legyen értelmük, megoldásul csak olyan x fogadható el, amelyre px, qx, rx megengedett logaritmus-alapszámok, vagyis 1-től különböző pozitív számok. Így $p, q, r > 0$ folytán $x > 0$, továbbá $x \neq 1/p, 1/q, 1/r$. Ha px, qx, rx közül legalább egyiknek értéke 1, akkor $a \neq 1$ esetén az egyenlet bal oldala értelmetlen, $a = 1$ mellett pedig határozatlan. Mindenképpen fel kell tennünk továbbá, hogy $a \neq 1$, különben az egyenlőség minden megengedett x -re teljesülne.

Térjünk át egyetlen logaritmusalapnak, pl. a 10-nek használatára. A $\log_b c = (\lg c)(\lg b)$ képlet alkalmazásával egyenletünk így alakul:

$$\frac{k \lg a}{\lg px} + \frac{l \lg a}{\lg qx} + \frac{m \lg a}{\lg rx} = \lg a \left(\frac{k}{\lg p + \lg x} + \frac{l}{\lg q + \lg x} + \frac{m}{\lg r + \lg x} \right) = 0,$$

és $\lg a \neq 0$ -val egyszerűsítve, továbbá a $\lg p = P, \lg q = Q, \lg r = R, \lg x = y$ jelölésekkel

$$\frac{k}{P+y} + \frac{l}{Q+y} + \frac{m}{R+y} = 0.$$

1

Innen – előre kizárva azokat az y -okat, amelyekkel a nevezők valamelyike 0-vá válhatna (ez a követelmény természetesen azonos azzal, hogy px, qx, rx egyike sem egyenlő 1-gyel) – a törtek eltávolításával és rendezéssel

$$(1) \quad k(y+Q)(y+R) + l(y+P)(y+R) + m(y+P)(y+Q) = 0,$$

másképpen

$$(2) \quad (k+l+m)y^2 + [k(Q+R) + l(P+R) + m(P+Q)]y + (kQR + lRP + mPQ) = 0,$$

vagy

$$(3) \quad (k+l+m)y^2 + [(k+l+m)(P+Q+R) - (kP+lQ+mR)]y + (kQR + lRP + mPQ) = 0.$$

Ez az egyenlet a k, l, m, P, Q, R paraméterektől függő együtthatóknak, ill. az y -t nem tartalmazó állandónak 0, ill. 0-tól különböző volta szerint más-más típusú, emiatt ezeket az eseteket külön vizsgáljuk. Legyenek y^2, y és y^0 együtthatói rendre A, B, C , így a vizsgálandó egyenlet:

$$(4) \quad Ay^2 + By + C = 0.$$

Diszkriminánsa a következő áttekinthető alakra hozható:

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= [k(R-Q)]^2 + [l(P-R)]^2 + [m(Q-R)]^2 - 2kl(R-Q)(P-R) - \\ &\quad - 2km(R-Q)(Q-P) - 2lm(P-R)(Q-P) = U^2 + V^2 + W^2 - \\ &\quad - 2UV - 2VW - 2WU, \end{aligned}$$

ahol $U = k(R-Q), V = l(P-R), W = m(Q-P)$.

Ia) Ha $A \neq 0$ és $B^2 - 4AC \geq 0$, akkor (4) másodfokú és két, ill. egy valós megoldása van: y_1, y_2 . Ha ezek $-P, -Q, -R$ mindegyikétől különbözők, akkor

$$x_1 = 10^{y_1}, x_2 = 10^{y_2}.$$

(A diszkrimináns eltűnése esetén x_2 felírása természetesen felesleges.)

Ib) Akkor is másodfokú a (4) egyenlet, ha $A \neq 0$ és $B^2 - 4AC < 0$, ekkor azonban nincsenek valós gyökei, x -re nincs megoldás. (Van ilyen eset, pl. $U = V = W \neq 0$ mellett $-3U^2 < 0$).

II. Ha $A = 0$ és $B \neq 0$, akkor (4) elsőfokú és egyértelműen megoldható, a (3) alakra gondolva

$$y_0 = -\frac{C}{B} = \frac{kQR + lRP + mPQ}{kP + lQ + mR},$$

és ebből $x_0 = 10^{y_0}$ feltéve ismét, hogy y_0 különbözik $-P, -Q, -R$ mindegyikétől, másképpen: x_0 a p, q, r paraméterek egyikének sem reciprokok értéke. – Ilyenkor $A = k+l+m = 0$ alapján k, l, m egyike kifejezhető a másik kettővel, tehát lényegében csak öt paraméter van.

¹Megjegyezzük, hogy 10-es helyett bármely más (megengedett) logaritmusok használatára áttérhettünk volna, pl. a -alapúra is. Így azonban látjuk, hogy a csak látszólag paramétere az adott egyenletnek, mert itt már nem szerepel.

III. Ha $A = 0$ és $B = 0$, akkor (4) nem tartalmazza y -t, így x sem határozható meg, vagyis (1)–(4) mindegyike is és az adott egyenlőség is vagy minden y -ra, ill. x -re teljesül, vagy egyre sem. Ekkor az $A = B = 0$ egyenlőségrendszerből k, l, m aránya kifejezhető P, Q, R -rel:

$$k : l : m = (R - Q) : (P - R) : (Q - P),$$

másképpen :

$$k = \lambda (R - Q), l = \lambda (P - R), m = \lambda (Q - P),$$

vagyis négy paraméter van: P, Q, R és λ , és ezekre a $klm \neq 0$ feltevés folytán egyrészt $\lambda \neq 0$, másrészt P, Q, R és így p, q, r is, egymástól különbözők. Ezekkel

$$C = \lambda [PQ(Q - P) + QR(R - Q) + RP(P - R)],$$

ami átrendezéssel így írható:

$$C = -\lambda (Q - P)(R - Q)(P - R).$$

Innen látható, hogy $A = B = 0$ mellett és a korábbi feltevésekkel $C \neq 0$, tehát ilyenkor nincs olyan x , amelyre egyenletünk teljesülne.

Megjegyzés. Ha $k + l + m \neq 0$ és P, Q, R különböző számok, akkor, mint (1)-ből látható, $-P, -Q, -R$ egyike sem gyök, mert pl. $y = -P$ -vel az (1) alak bal oldala: $k(-P + Q)(-P + R) \neq 0$. Ha viszont pl. $P = Q \neq R$, akkor $y = -P$ egyik gyöke (1)-nek, a másik pedig

$$y = -\frac{(k + l)R + mP}{k + l + m}.$$

Végül $P = Q = R$ mellett (1) így alakul:

$$(k + l + m)(y + P)^2 = 0,$$

vagyis $y = -P$ kétszeres gyök, más gyök nincs.