

I. megoldás: Az adott $P(a, b, c)$ kifejezést kifejtve a $\pm 3x^2yz$ típusú hat tag kiesik – itt x, y, z valamely sorrendben a, b, c -t jelöli –, (ellenőrizzék ezt olvasóink a „fejbeli” számolás gyakorlására a tagok leírása nélkül; a Szerk.), a megmaradó hat tagot pedig c hatványai szerint rendezve, majd az egyenlő kitevőjű hatvány-különbségeket szorzattá alakítva kiemelhetjük az $(a - b)$ tényezőt:

$$\begin{aligned} P(a, b, c) &= (b - a)c^3 + (a^3 - b^3)c + ab(b^2 - a^2) = \\ &= (a - b)[-c^3 + (a^2 + ab + b^2)c - ab(a + b)]. \end{aligned}$$

Most a nagy zárójel tagjait a hatványai szerint átrendezve kiemelhetjük $(b - c)$ -t:

$$\begin{aligned} P(a, b, c) &= (a - b)[(c - b)a^2 + b(c - b)a + c(b^2 - c^2)] = \\ &= (a - b)(b - c)[-a^2 + ab + c(b + c)]. \end{aligned}$$

Végül a nagy zárójelben b szerint rendezve kiemelhetjük $(c - a)$ -t:

$$\begin{aligned} P(a, b, c) &= (a - b)(b - c)[(c - a)b + (c^2 - a^2)] = \\ &= (a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c), \end{aligned}$$

és evvel a kifejezést a, b és c négy elsőfokú polinomjának szorzataként írtuk fel, további felbontás már nem lehetséges.

Várhelyi Judit (Bp. I., Építőanyagipari technikum IV.o. t)

II. megoldás: A $P(x, b, c)$ kifejezésnek, mint x polinomjának az $x = b$ és $x = c$ helyek 0-helyei:

$$\begin{aligned} P(b, b, c) &= b(b - c)^3 + b(c - b)^3 = 0, \\ c(c, b, c) &= c(b - c)^3 + c(c - b)^3 = 0, \end{aligned}$$

eszerint x helyett újra a -t írva a kifejezésből $a - b$ és $a - c$ kiemelhető.

Hasonló megfontolással adódik, hogy a kifejezésből $b - a$ és $b - c$, ill. $c - a$ és $c - b$ is kiemelhető. A kapott hat tényezőtől azonban kettő-kettő csak előjelben tér el, tehát három lényegesen különböző tényezőt kaptunk.

Másrészt látjuk, hogy a, b, c helyére b, c, a -t, majd c, a, b -t írva a kifejezés nem változik meg. Hogy ez a tulajdonság a fenti tényezők kiemelése után is látható maradjon, vegyük első tényezőnek $a - b$ -t, a további kettőnek pedig a belőle a fenti helyettesítésekkel adódó; $b - c$ és $c - a$ különbségeket. A kiemelt $Q(a, b, c) = (a - b)(b - c)(c - a)$ szorzat éppenúgy homogén kifejezése a, b, c -nek, mint $P(a, b, c)$, fokszámuk 3, ill. 4, ennél fogva $P(a, b, c)$ -nek $Q(a, b, c)$ -vel való osztása hányadosként egy ugyancsak homogén $R(a, b, c)$ kifejezésre vezet, amelynek fokszáma $4 - 3 = 1$. Legyen ebben a, b, c együtthatója rendre A, B, C , azaz $R(a, b, c) = Aa + Bb + Cc$. A fenti helyettesítéseknek ezt is önmagába kell átvinniük. Abból a követelésből, hogy

$$Aa + Bb + Cc = Ab + Bc + Ca = Ac + Ba + Cb$$

azonosság legyen, azaz bármely a, b, c értékrendszerre fennálljon, következik (pl. $a = 1, b = c = 0$ helyettesítéssel), hogy $A = B = C$, így $R(a, b, c) = A(a + b + c)$ és

$$P(a, b, c) = A(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c).$$

Végül pl. a^3 bal és jobb oldali együtthatójának megegyezéséből $-b + c = -A(b - c)$, azaz $A = 1$ és

$$P(a, b, c) = (a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c).$$

Flanek László (Bp. I., Toldy F. g. III. o. t.)

Megjegyzés. $P(x, b, c)$ mint x -nek polinomja harmadfokú. Harmadik 0-helyét megkeresve is kapunk egy kiemelhető tényezőt (sőt ez a következtetés folytatása az első két tényező megállapításának). Az I. megoldás szerint $P(x, b, c)$ kifejtett alakjában x^2 együtthatója 0, eszerint a $P(x, b, c) = 0$ egyenlet gyökeinek összege 0, így $x_1 = b$ és $x_2 = c$ -ből $x_3 = -b - c$, a harmadik gyöktényező: $a - x_3 = a + b + c$. A gyöktényező alak céljára x^3 együtthatója az I. megoldás első rendezéséhez hasonlóan $c - b$, így $P(a, b, c) = (c - b)(a - b)(a - c)(a + b + c)$, és ebből a fenti szimmetrikus alak $(-1)^2$ -nel való szorzás útján adódik.

III. megoldás: Az átalakítások megkönnyítésére igyekezzünk a különbségek helyett, amelyeknek köbe szerepel, egy-egy betűt vezetni be. Mivel $(b - c) + (c - a) + (a - b) = 0$, így kettővel a harmadik már kifejezhető. Legyen tehát $b - c = m, c - a = n$, ekkor $a - b = -m - n$, és az első két egyenlőségből b -t és a -t kifejezve az adott kifejezést c, m és n polinomjává alakíthatjuk: $a = c - n, b = c + m$, és az adott kifejezés:

$$\begin{aligned} (c - n)m^3 + (c + m)n^3 - c(m + n)^3 &= [m^3 + n^3 - (m + n)^3]c + mn(n^2 - m^2) = \\ &= -3mn(m + n)c + mn(m + n)(n - m) = mn(m + n)(-3c + n - m), \end{aligned}$$

végül az eredeti változókra visszatérve:

$$\begin{aligned} -(b - c)(c - a)(a - b)(-3c + c - a - b + c) &= \\ &= (a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c). \end{aligned}$$