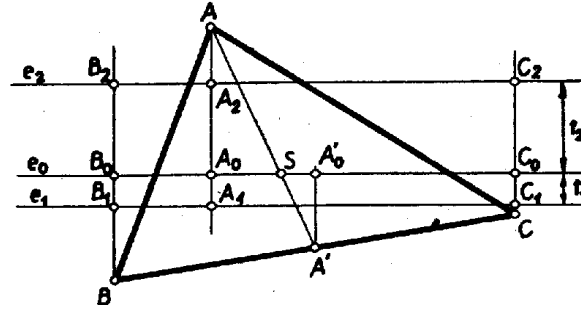


I. megoldás: Előkészítésül megmutatjuk, hogy az ABC háromszög S súlypontján átmenő egyeneseknek a háromszögtől mért középtávolsága 0. Ha egy ilyen e éppen súlyvonal, pl. AA' – ahol A' a BC oldal felezőpontja –, akkor A távolsága e -től 0, az e -nek két partjára eső B és C -nek BB_1 , ill. CC_1 távolságai pedig az $A'BB_1$ és $A'CC_1$ derékszögű háromszögek egybevágósága folytán (átfogó és két szög) egyenlők, és így a középtávolságot adó különbség valóban 0. Minden más esetben az S -en áthaladó e_0 egyenes egy csúcsot elválaszt a másik kettőtől, legyen ez A . A másik parton fekvő B és C távolságainak, mint a BB_0C_0C trapéz (a 0 index az e_0 -on levő vetületet jelöli) párhuzamos oldalainak összege egyenlő a középvonalnak, A' e_0 -tól mért $A'A'_0$ távolságának kétszeresével; ugyanennyi A -nak e_0 -tól való AA_0 távolsága is, mert az $SA'A'_0$ és SAA_0 háromszögek hasonlóak (két szög), és így a súlypont harmadoló tulajdonságánál fogva $AA_0 : A'A'_0 = SA : SA' = 2 : 1$, vagyis $AA_0 = 2A'A'_0$. Ezek szerint a képezendő különbség ismét 0.



Most megmutatjuk, hogy ha az e egyenes párhuzamos e_0 -val és távolságuk t , akkor e -nek a háromszögtől mért középtávolsága $3t$. e az e_0 -ból a mindkettőjükre merőleges egyenes mentén t -vel való eltolással is előállítható. Eközben e -nek az egyes csúcsoktól mért távolsága vagy növekszik – ti. ha e az e_0 -nak a csúccsal ellentétes partján van –, vagy csökken, ha a csúccsal megegyező partján, és 0-ra csökken, ha e átmegy a csúcson. (Egyelőre olyan legyen e , amely ugyanúgy választja szét A , B , C -t mint e_0 , azaz eltolással nem lép át csúcsot.) Pl. az ábrán e_1 azon a partján van e_0 -nak, mint B és C , így e_1 az A -tól messzebb, B és C -hez közelebb van, mint e_0 , e_2 viszont A -hoz közelebb, B és C -től távolabb van mint e_0 ; így középtávolságuk:

$$AA_1 - (BB_1 + CC_1) = 3t_1, \quad \text{ill.} \quad (BB_2 + CC_2) - AA_2 = 3t_2,$$

mert egy tag nőtt és két tag csökkent t_1 -gyel, ill. két tag nőtt és egy tag csökkent t_2 -vel (az e_0 -ra fentebb kapott 0 középtávolsághoz képest).

A középtávolság megállapításában az abszolút értéket a példákban úgy kaptuk meg, hogy a különbségben a megnövekedett távolságot (ill. távolságok összegét) vettük kisebbítendőnek. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a három csúcs távolságát *előjelesen összeadtuk*, és ebben azon csúcsoknak e -től mért távolságát vettük negatívnak, amelyek e_0 -nak ugyanazon partján vannak, mint e , az ellentett parton levőket pedig pozitívnak. Továbbfejlesztve: azt, hogy a negatívnak vett távolságok abszolút értéke t -vel csökkent, és a pozitívnak vettek t -vel növekedett, úgy mondhatjuk, hogy minden (előjeles) távolságot t -vel növeltünk, így növekedett a háromtagú összeg $3t$ -vel. Ezek a megállapításaink már olyan e -kre is érvényesek, amelyekbe az e_0 eltolásával egy, vagy két csúcs átlépése után jutunk el, és így a középtávolságnak az eredeti előírás szerinti képezésében a levonandók hozzáadandóvá válnak, megfelelően annak, hogy t hozzáadásával az eredetileg negatív távolság pozitívvá lett.

Ha már most a súlyponttól t távolságra eltoló egyenes középtávolsága $3t$, akkor a d középtávolságú egyenesek azok és csak azok, amelyek a súlyponttól $d/3$ távolságra vannak, azaz amelyek érintik a súlypont körül $d/3$ sugárral írt kört.

Simon László (Bp. XI., József A. g. IV. o. t.)

II. megoldás: Legyenek az adott háromszög csúcsai valamely derékszögű koordináta-rendszerben $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, és legyen az $y = mx + b$ egyenesnek e háromszögtől mért középtávolsága d . Ekkor felhasználva a pontnak egyenestől mért távolságára a koordináta-geometriából ismert képletet:

$$d = d_1 + d_2 + d_3 = \left| \frac{y_1 - mx_1 - b}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{y_2 - mx_2 - b}{\sqrt{m^2 + 1}} + \frac{y_3 - mx_3 - b}{\sqrt{m^2 + 1}} \right|.$$

Itt nem volt szükség d -nek d_1, d_2, d_3 -ból összeadással, összeadás és kivonással való képezésére, esetek széjjelválasztására, ugyanis a képlet már előjellel adja a távolságot aszerint, hogy a pont az egyenesnek egyik vagy másik partján van.

Átrendezéssel

$$\left| \frac{\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} - m \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} - b}{\sqrt{m^2 + 1}} \right| = \frac{d}{3},$$

továbbá, felismerve a bal oldali számlálóban háromszögünk S súlypontjának y_s, x_s koordinátáit:

$$\left| \frac{y_s - mx_s - b}{\sqrt{m^2 + 1}} \right| = \frac{d}{3},$$

ez pedig azt jelenti, hogy az $y = mx + b$ egyenes S -től $d/3$ távolságban van, érinti az S körül $d/3$ sugárral írt kört. Az átalakításokat visszafelé olvasva belátható, hogy minden az S körül $d/3$ sugárral írt kört érintő egyenesnek a háromszögtől való középtávolsága d .

Biborka Tamás (Makó, József A. g. I. o. t.)