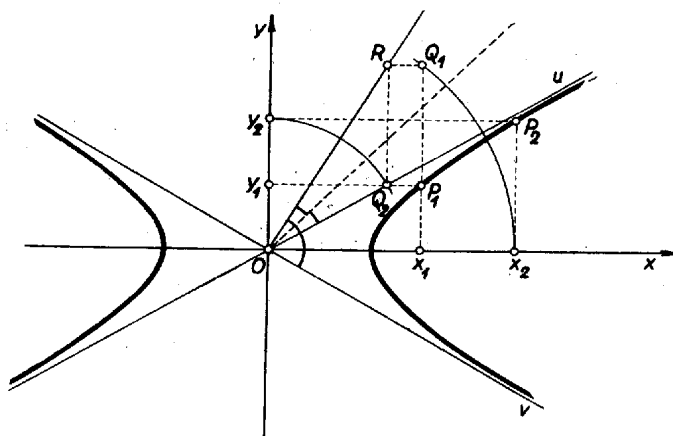


I. megoldás: Legyenek az adott elemek rendre O , x , P_1 , és P_2 , továbbá az O -ban x -re merőlegesen álló képzetes tengely y , végül a keresett aszimptoták u és v .

Feltehetjük, hogy P_1 és P_2 az x és y által létrehozott síknegyedek közül ugyanegyben van pl. x és y -t a koordinátatengelyek szokásos irányításába állítva a jobb felső I. negyedben, esetleg egyikük az x -en, vagyis a hiperbola egyik ágának ugyanazon a felén; ugyanis a II., III., vagy IV. negyedben adott pontok esetén y -ra, O -ra, ill. x -re való tükrözéssel a mondott helyzet előállítható. Feltesszük továbbá, hogy P_1 és P_2 az esetleges ilyen tükrözések után is különböző pontjai a hiperbolának, – azaz $OP_1 \neq OP_2$ és az indexek alkalmas megválasztásával $OP_1 < OP_2$ –, természetesen O -tól is különböznek, és a P_1P_2 egyenes x , y egyikével sem párhuzamos, és nem megy át O -n. A kizárt esetekben ugyanis vagy nincs meghatározva a hiperbola, vagy nem létezik a követelményeket kielégítő hiperbola.

O ismeretében elegendő az aszimptotáknak egy-egy O -tól különböző pontját megszerkeszteni; keressük azt az U , ill. V pontjukat, ahol a P_1P_2 egyenest metszik (1. ábra).



1. ábra

Ezek a P_1 , P_2 pontpárra tett feltevés folytán egyrészt léteznek – ugyanis P_1P_2 nem lehet u és v egyikével sem párhuzamos, mert aszimptotával párhuzamos egyenesen a hiperbolának nem lehet két pontja, – másrészt O -tól és így egymástól is különbözők, O -val együtt háromszöget alkotnak, U és V egyike az I., másika a IV. negyedben van.

Ismeretes, hogy a hiperbola bármely húrjának felezőpontja egyben a hűrt kimetsző egyenesnek az aszimptoták közti szakaszát is felezi; eszerint P_1P_2 -nek p felezőmerőlegese egyben az OUV háromszög UV oldalát is merőlegesen felezi. Tudjuk továbbá, hogy u és v tükrös egyenespár a tengelyekre nézve, eszerint x és y adják az OUV háromszög O csúcsánál levő belső és külső szögek felezőit, mégpedig x „pozitív” oldala a belső szögfelező, mint az U , V -t tartalmazó I. és IV. síknegyed elválasztó vonala. Minthogy pedig a háromszög bármelyik csúcsából kiinduló belső és külső szögfelezőpár a szemközti oldal felező merőlegeséből a körülírt kör egy átmérőjét metszi ki, azért p -nek x , ill. y -nal való Q_1 , Q_2 metszéspontjai között megkapjuk a háromszög körülírt körének egy átmérőjét, és e körnek P_1P_2 -vel való metszéspontjaiban a keresett U , V -t.

Az elemzésből a szerkesztés lépései: O -n át meghúzzuk az x -re merőleges y -t, P_1P_2 felező merőlegesének az x és y közé eső Q_1Q_2 szakasza mint átmérő fölé k kört írunk, ebből P_1P_2 -vel kimetszük U , V -t, végül OU és OV megrajzolásával megkapjuk az u , v aszimptotákat. – Változat: y és Q_2 mellőzhető: k -nak K középpontját P_1P_2 és OQ_1 felező merőlegesének metszéspontja is megadja, sugara pedig $r = KO = KQ_1$.

Valóban, a kapott U , V pontokra $UP_1 = VP_2$ és x felezi a VOU szöget, ezért OU és OV aszimptoták.

Mindezekből azt is látjuk, hogy ha a feladat megoldható, akkor csak egy megoldás (egy u , v pár) van. A megoldhatóság feltétele, hogy p messe x és y mindegyikét, azaz P_1P_2 se x -szel, se y -nal ne legyen párhuzamos. Ezt a P_1 , P_2 párra tett feltevésünk már biztosítja, ugyanis p csak úgy lehetne párhuzamos a tengelyek valamelyikével, ha ugyanez P_1P_2 -re is állna. Végül, hogy x -nek pozitív oldala belső szögfelezője legyen az OUV háromszögnek, hogy a két szimmetriatengely közül ez legyen a valós tengely, ehhez szükséges, hogy az OP_1P_2 háromszög a csúcsok ezen sorrendjében pozitív körüljárású legyen, másszóval az oldalai közti $OP_1 < OP_2$ egyenlőtlenséggel együtt az ezen oldalai és x pozitív fele közti α_1 és α_2 szögekre ugyanezen értelemben $\alpha_1 < \alpha_2$ álljon.

Galambos János (Veszprém, Lovassy L. G. IV. o. t.)

Megjegyzés. P_1 és P_2 -nek az I. negyedbe való rögzítésével tulajdonképpen csak az elemzést és a diszkussziót könnyítettük meg. A szerkesztés bármely P_1 , P_2 pontpárral végrehajtható, hacsak p metszi x és y mindegyikét. Az ellentétes eset pedig azt jelenti, hogy P_1 és P_2 vagy tükrösek, x és y és O egyikére, vagyis az adatok nem függetlenek egymástól, vagy pedig a feladat megoldhatatlan, az adatok ellentmondásban vannak (pl. ha x merőleges P_1P_2 -re, de nem felező merőlegese a P_1P_2 szakasznak). Ha α_1 , α_2 -vel az OP_1 , OP_2 egyeneseknek x -szel bezárt hegyes szögét jelölve $OP_1 < OP_2$ és $\alpha_1 > \alpha_2$, akkor x nem valós, hanem képzetes tengelye lesz a hiperbolának.

II. megoldás: Legyen P_1P_2 metszéspontja x , y -nal S_1 , ill. S_2 , és P_1P_2 felezőpontja T . Ekkor a szögfelezők által létrehozott szakaszokra vonatkozó tétel szerint az OUV háromszögben

$$S_1U : S_1V = OU : OV = S_2U : S_2V.$$

Itt az első és a harmadik arány tagjait olyan szakaszok összegével, ill. különbségével helyettesíthetjük, amelyeknek egyik végpontja T :

$$(TU + TS_1) : (TV - TS_1) = (TS_2 + TU) : (TS_2 - TV).$$

Innen egyrészt $TV = TU$ figyelembevételével, másrészt mindkét arány helyett a tagjai összegéből és különbségéből képezett arányra áttérve

$$2TU : 2TS_1 = 2TS_2 : 2TU,$$

amiből

$$TU^2 = TS_1 \cdot TS_2,$$

vagyis U és V -nek a megszerkeszthető T -től az ismert P_1P_2 egyenesen mért távolsága mértani középárányos a megszerkeszthető TS_1 és TS_2 szakaszok között.

Tusnádý Gábor (Sátoraljaújhely, Kossuth L. g. III. o. t.)

III. megoldás: Legyen az adott O és x origója, ill. X tengelye egy derékszögű koordináta-rendszernek és legyenek az adott pontok koordinátái ebben a rendszerben $P_1(x_1, y_1)$, ill. $P_2(x_2, y_2)$. Ekkor hiperbolánk egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

alakú. Itt az ismeretlen a és b meghatározhatók volnának abból a két egyenletből álló

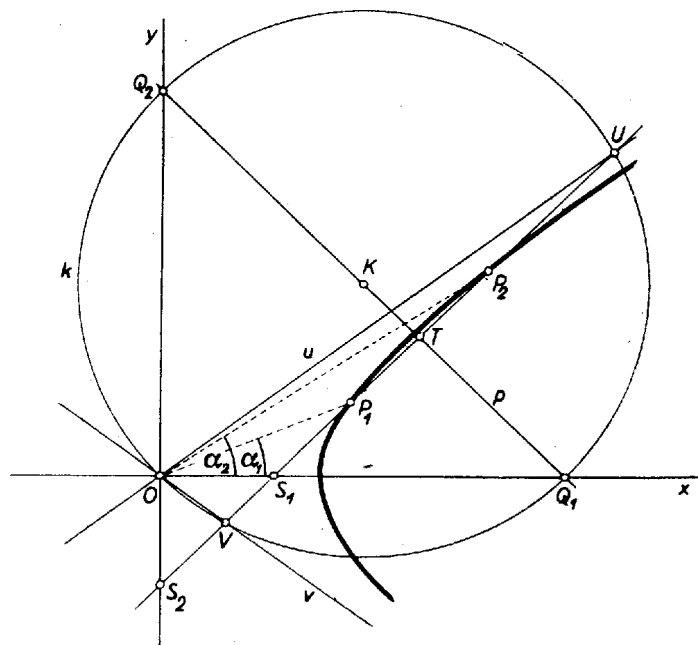
$$(1) \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

$$(2) \quad \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1$$

egyenletrendszerből, amely azt fejezi ki, hogy P_1 és P_2 rajta vannak a hiperbolán, most azonban az aszimptoták $\pm b/a$ iránytangense céljára csak arányukra van szükség. (1) és (2) kivonásával és alkalmas rendezéssel

$$(3) \quad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{y_2^2 - y_1^2}}{\sqrt{x_2^2 - x_1^2}}$$

és ez, ill. az aszimptoták derékszögű háromszögek révén megszerkeszthetők pl. a következő lépésekben: az O körül x_2 , ill. y_2 sugárral rajzolt, I. negyedbeli negyedköríveket metsszük, és pedig az előbbi a P_1 -en át az X -tengelyre, az utóbbit az Y -tengelyre állított merőlegessel, majd a kapott Q_1 -en át az Y -ra, Q_2 -n át az X -re állított merőlegesnek R metszéspontját összekötjük O -val. Ekkor OR -nek α irányszögére $\tan \alpha = a/b$, ennél fogva u -t OR -nek az I. negyed szögfelezőjére való tükrözésével, v -t pedig O -ban az OR -re állított merőlegesként kaphatjuk (2. ábra).



2. ábra

(3)-ban feltettük, hogy $x_2 > x_1 (> 0)$, így a nevezőbeli gyök alatt pozitív szám áll. Ehhez (1) és (2)-t, valamint az $y_1 \geq 0, y_2 > 0$ feltevéseket hozzátéve már következik, hogy $y_2 > y_1$, vagyis (3) számlálója is valós, ugyanis

$$\frac{y_2^2}{b^2} = \frac{x_2^2}{a^2} - 1 > \frac{x_1^2}{a^2} - 1 = \frac{y_1^2}{b^2}.$$

Sárközy András (Gyöngyös, Vak Bottyán g. IV. o. t.)

IV. megoldás: Az adott két pont, valamint x, y és O -ra vonatkozó tükörképeik közül választott 5 pont felhasználásával a kúpszeletbe írt hatszögre vonatkozó Pascal-tétel alapján megszerkeszthetjük e pontok bármelyikében a hiperbola érintőjét.¹ Láttuk továbbá a 847. feladat II. megoldásában,² hogy egy P hiperbolapont és a benne húzható e érintő, valamint az x, y tengelyek ismeretében hogyan szerkeszthetők meg az F_1, F_2 fókuszok: annak a körnek az x valós tengely egyenesével való metszéspontjaiként, amelynek középpontja az y képzetes tengelyen van, és amely átmegy P -n, valamint e és y -nak C metszéspontján. Végül a 847. feladat III. megoldásában³ látott tétel megfordításával F_1, F_2, P és e ismeretében megszerkeszthetjük e -nek az aszimptotákkal való metszéspontjait: az az F_1, F_2 -n átmenő kör metszi ki ezeket, amelynek középpontját a P -ben e -re emelt merőleges metszi ki y -ból.

Pődör Bálint (Bp. II., Rákóczi F. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. A fókuszok ismeretében a szerkesztést annak alapján is folytathatjuk, hogy F_1, F_2 -nek e -n való F'_1, F'_2 merőleges vetületei rajta vannak az O középpű, a sugarú főkörön; így az $OF_1 = c$ átfogóból és az $OF'_1 = a$ befogóból szerkesztett derékszögű háromszög másik befogójában megkapjuk b -t, végül b/a -ban az aszimptoták iránytangensét.

¹Lásd pl. *Schopp János*: Kúpszeletek (Középisk. Szakköri Füzet), Tankönyvkiadó, 1955. 73–74. o., 68. és 70. §.

²KML. XVI. kötet 89. o. (1958 március).

³K. M. L. XVI. kötet 89. o. (1958 március).