

I. megoldás: Mint hogy a kívánt hatványkitevő: $16 = 2^4$, azért kézenfekvő a 16-ik hatványokhoz négy egymásutáni négyzetre emeléssel eljutni. Nem szükséges az x_1, x_2, x_3 gyököket kiszámítani, mert összegüket, páronkénti szorzataik összegét és szorzatukat (szokásos nevükön elemi szimmetrikus függvényeiket) megadják az egyenlet együtthatói, és ezek a számításához elegendők. A számítás menetét előzetesen általában az

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

egyenlettel kapcsolatban mutatjuk be, amelynek y_1, y_2, y_3 gyökeire a polinom alakkal azonos $(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) = 0$ gyöktényező alak kifejtésével való összehasonlítás révén

$$\begin{aligned} (1) \quad & y_1 + y_2 + y_3 = -a, \\ (2) \quad & y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = b, \\ & y_1y_2y_3 = -c. \end{aligned}$$

Az $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ összeg tagjai szerepelnek $y_1 + y_2 + y_3$ négyzetében, de mellettük áll még a páronkénti szorzatok összegének kétszerese, ennélfogva

$$(3) \quad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = (y_1 + y_2 + y_3)^2 - 2(y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3).$$

Ennek alapján y_1, y_2, y_3 helyett mindkét oldalon y_1^2, y_2^2, y_3^2 -et írva

$$y_1^4 + y_2^4 + y_3^4 = (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^2 - 2(y_1^2y_2^2 + y_1^2y_3^2 + y_2^2y_3^2)$$

adódik, amiből látjuk, hogy szükségünk lesz a gyökök négyzeteiből képezhető páronkénti szorzatok összegére is. Ezt (1) bal oldalának négyzetéből képezhetjük a mellette fellépő tagok levonásával; éspedig

$$(4) \quad \begin{aligned} y_1^2y_2^2 + y_1^2y_3^2 + y_2^2y_3^2 &= (y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3)^2 - 2y_1^2y_2y_3 - 2y_1y_2^2y_3 - 2y_1y_2y_3^2 = \\ &= (y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3)^2 - 2y_1y_2y_3(y_1 + y_2 + y_3), \end{aligned}$$

amiben már (2) bal oldalát is használjuk, vagyis mindhárom elemi szimmetrikus függvényt.

A nyolcadik hatványok összegének hasonló számításához y_1^2, y_2^2, y_3^2 -nak mindhárom elemi szimmetrikus függvényére van szükség, a 16-ik hatványok összegének számításához pedig y_1^4, y_2^4, y_3^4 -nak mindhárom elemi szimmetrikus függvényére.

Mindezek alapján adott egyenletünkre

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3, \quad x_1x_2x_3 = -1;$$

ezekből (3) és (4) alkalmazásával, valamint négyzetreemeléssel

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2(-3) = 6, \quad x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 = (-3)^2 = 9, \quad x_1^2x_2^2x_3^2 = 1;$$

e három számból ugyanígy

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 6^2 - 2 \cdot 9 = 18, \quad x_1^4x_2^4 + x_1^4x_3^4 + x_2^4x_3^4 = 9^2 - 2 \cdot 6 = 69, \quad x_1^4x_2^4x_3^4 = 1;$$

hasonlóan (3) és (4) alkalmazásával

$$x_1^8 + x_2^8 + x_3^8 = 18^2 - 2 \cdot 69 = 186, \quad x_1^8x_2^8 + x_1^8x_3^8 + x_2^8x_3^8 = 69^2 - 2 \cdot 18 \cdot 1 = 4725;$$

(a szorzatra már nem lesz szükség);

végül e két számból már csak (3) alkalmazásával

$$x_1^{16} + x_2^{16} + x_3^{16} = 186^2 - 2 \cdot 4725 = 25\,146.$$

Tusnádý Gábor (Sátoraljaújhely, Kossuth L. g. III. o. t.)

II. megoldás: Felhasználva, hogy a gyökök kielégítik az egyenletet, a gyökök magasabb hatványait helyettesíthetjük alacsonyabb hatványaik polinomjaival. A gyököket x_1, x_2, x_3 -mal jelölve $x_1^3 - 3x_1 + 1 = 0$, vagyis $x_1^3 = 3x_1 - 1$. Ezt x_1 -gyel szorozva, majd négyzetreemelve

$$\begin{aligned} x_1^4 &= 3x_1^2 - x_1, \\ x_1^8 &= 9x_1^4 - 6x_1^3 + x_1^2 = 9(3x_1^2 - x_1) - 6(3x_1 - 1) + x_1^2 = 28x_1^2 - 27x_1 + 6, \end{aligned}$$

újabb négyzetreemeléssel

$$\begin{aligned} x_1^{16} &= (28x_1^2 - 27x_1 + 6)^2 = 784x_1^4 - 1512x_1^3 + 1065x_1^2 - 324x_1 + 36 = \\ &= 784(3x_1^2 - x_1) - 1512(3x_1 - 1) + 1065x_1^2 - 324x_1 + 36 = \\ &= 3417x_1^2 - 5644x_1 + 1548. \end{aligned}$$

Az 1-es index helyére 2-t, majd 3-at írva; végül összegezve (ugyanis ugyanezek x_2 és x_3 -ra is érvényesek)

$$x_1^{16} + x_2^{16} + x_3^{16} = 3417(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 5644(x_1 + x_2 + x_3) + 4644,$$

és itt a zárójeles összegeket az I. megoldás módján számítva a keresett összeg értéke

$$3417 \cdot 6 + 4644 = 25\,146.$$

Ágh Attila (Bp. V., Eötvös J. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az I. megoldás eljárása – jelentősen általánosabbá és gépiessé téve – egyik lényeges szakaszát teszi az ún. *Gräffe–Lobacsevszkij-féle eljárásnak*, amely bárhányszokos algebrai egyenletek közelítő megoldására használatos.

2. Hogy számításunknak biztosan legyen értelme a középiskolai fokon ismert *valós számok körében*, ahhoz kellett volna győződnie, hogy mindhárom gyök valós. Ezt az $f(x) = x^3 - 3x + 1$ függvény ábrázolására, pontosabban grafikonjának folytonosságára gondolva (hogy ti. grafikonjának bármely két pontja közti íve úgy rajzolható meg, hogy az íróeszközt nem emeljük fel a papírról) avval valószínűsítjük, hogy $f(-2) = -1$, azaz negatív, $f(-1) = +3$ (pozitív), $f(0) = +1 > 0$, $f(1) = -1 < 0$ és $f(2) = 3 > 0$, ennél fogva a grafikon -2 és -1 , továbbá 0 és 1 , majd 1 és 2 között metszi az x tengelyt, tehát e számközök mindegyikében van egy valós gyök, mindhárom gyök valós.