

I. megoldás: S_n -et kombinatorikai megfontolás alapján határozzuk meg. Nevezzük az $(n + 1) \cdot (n + 1)$ mezős sakktáblán $n + 1$ bástyának olyan elrendezését, melyben egyik sem ütheti a másikat, *szabad felállításnak*. A különböző szabad felállítások száma nyilván $(n + 1)!$, ugyanis az elsőként elhelyezendő bástya számára az első sorban $n + 1$ -féleképpen választhatjuk a mezőt, ez – a maga oszlopa révén – a 2-ik sorban 1 mezőt használhatatlanná tesz, tehát ott a 2-ik bástya helye n -féleképpen választható, és így az első két sor bástyái $(n + 1) \cdot n$ -féleképpen állíthatók fel; a 3-ik, 4-ik, ..., n -edik, $n + 1$ -edik bástya hasonlóan rendre $n - 2, n - 3, \dots, 2, 1$ -féleképpen, és így valamennyi bástya $F_{n+1} = (n + 1) \cdot n(n - 1) \dots 2 \cdot 1 = (n + 1)!$ -féleképpen.

Az F_{n+1} számot egy más, az összes szabad felállításokat ugyancsak kimerítő módon is megállapíthatjuk. Az első bástyát az első sor 1, 2, ..., n sorszámu mezejére állítva ennek „ütősugarain” kívül marad $n \cdot n$ mező, ezeken a további n bástyát az előzők szerint minden esetben $n!$ -féleképpen lehet elrendezni, tehát az ilyen szabad felállítások száma $n \cdot n!$. Ugyanez a helyzet az első bástyának az első sor $n + 1$ -ik (azaz sarok-)mezőre való állításakor is, ekkor a szabad mezők összefüggő $n \cdot n$ mezős sakktáblát alkotnak, tehát rajta a szabad felállítások száma F_n alakban is írható, ennél fogva $F_{n+1} = n \cdot n! + F_n$. Az F_n -et hasonlóan az első sor utolsó mezejének (az eredeti tábla 2-ik sora n -edik mezejének) külön való figyelembevételével $(n - 1)(n - 1)! + F_{n-1}$ -nek találjuk, így $F_{n+1} = n \cdot n! + (n - 1)(n - 1)! + F_{n-1}$. Ezt a gondolatmenetet folytatva $F_3 = 2 \cdot 2! + F_2$ -re jutunk, itt már közvetlenül látjuk, hogy $F_2 = 2 = 1 \cdot 1! + 1$, ennél fogva

$$F_{n+1} = n \cdot n! + (n - 1)(n - 1)! + \dots + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1! + 1,$$

és ennek első n tagjában S_n -re ismerünk rá.

A kétféle megszámolás révén $(n + 1)! = S_n + 1$, így $S_n = (n + 1)! - 1$.

Győry Kálmán (Ózd, József Attila g. IV. o. t.)

II. megoldás: Egyszerű átalakítással közvetlenül adódik, hogy

$$\begin{aligned} S_n &= (2 - 1)1! + (3 - 1) \cdot 2! + (4 - 1) \cdot 3! + \dots + [(n + 1) - 1] \cdot n! = \\ &= 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \dots + (n + 1)! - n! = (n + 1)! - 1. \end{aligned}$$

Bagyinszky János (Nagykőrös, Arany J. g. IV. o. t.)