

I. megoldás: Feladatunk állítása úgy is kimondható, hogy az O pontnak S -re vonatkozó T tükörképe rajta van annak a hat síknak mindegyikén, amelyek egy-egy él felezőpontján áthaladva a szembenfekvő élre merőlegesen állnak. Az állítást ebben az alakban fogjuk bizonyítani, így ugyanis nincs szükség arra, hogy külön vizsgáljuk azt az esetet, amikor O és S egybeesnek, és így az OS egyenes nincs egyértelműen meghatározva.

Jelöljük az $ABCD$ tetraéder tetszős szerint választott BC , AD szembenfekvő éleinek felezőpontjait F_1 , ill. F_2 -vel és az ezeken át AD -re merőlegesen állított síkokat σ_1 , ill. σ_2 -vel. Minthogy szerkesztésüknél fogva σ_1 és σ_2 párhuzamosok, továbbá S felezi a végpontjaival σ_1 , ill. σ_2 -re támaszkodó F_1F_2 szakaszt, azért σ_1 tükörképe σ_2 -nek S -re vonatkozóan. Ámde O rajta van σ_2 -n, ennél fogva S -re vonatkozó T tükörképe rajta van σ_1 -en, amit bizonyítani akartunk. Mindez akkor is érvényes, ha σ_1 és σ_2 egybeesnek. Meggondolásunk bármely szemköztes élpárra alkalmazható, mert a BC , AD élpárnak semmi olyan tulajdonságát nem használtuk ki, ami ne volna meg bármely szemköztes élpárnak (nincs is ilyen a feltevésben, hiszen tetszőleges tetraéderről szól az állítás). Ezzel bizonyításunkat befejeztük.

Grallert Ferenc (Miskolc, Földes F. g. III. o. t.)

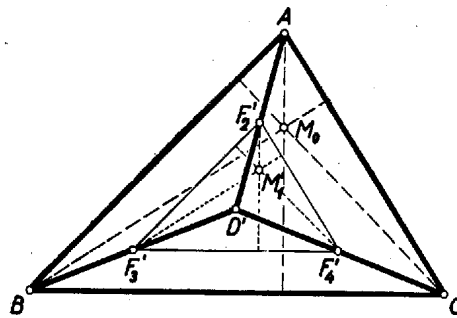
II. megoldás: Az O és T , valamint a fenti F_1 , F_2 pontok paralelogrammát határoznak meg, mert az OF_2TF_1 négyszög OT és F_1F_2 átlóinak közös a felezőpontja: S , tehát $TF_1 \parallel OF_2$. Ámde O definíciója folytán OF_2 merőleges AD -re, így TF_1 is merőleges AD -re, tehát T benne van az F_1 -en át AD -re merőlegesen állított síkban.

Náray Miklós (Bp. VIII., Széchenyi I. g. III. o. t.)

III. megoldás: Az O és T tükrösségére gondolva tekintsük az egész $ABCD$ tetraédernek az S súlypontra vonatkozó $A'B'C'D'$ tükörképét. Minthogy S közös felezőpontja a három szemközti élpár felezőpontjait összekötő szakasznak, azért $A'B'C'D'$ élfelező pontjai egybeesnek $ABCD$ -éivel pl. (az előző megoldások jelöléseivel) $A'D'$ -nek F_2' felezőpontja egybeesik BC -nek F_1 felezőpontjával. És mivel még $A'D'$ párhuzamos AD -vel, azért az F_1 en át AD -re merőlegesen álló sík egybeesik az F_2' -n át $A'D'$ -re merőlegesen álló síkkal, azaz $A'D'$ felezőmerőleges síkjával, tehát átmegy $A'B'C'D'$ körülírt gömbjének O' középpontján, ami pedig a tükrözés folytán éppen O -nak S -re vonatkozó tükörképe. Evvel az állítást bebizonyítottuk.

Montvay István (Bp. XIX. Landler J. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Jelöljük a D csúcsból kifutó DA , DB , DC élek felezőpontjait F_2 , F_3 , F_4 -gyel. Az $F_2F_3F_4$ háromszög a D középpontra nézve hasonló helyzetű az ABC háromszöggel, ennél fogva az F_2 , F_3 , F_4 -en át a BC , CA , ill. AB élre merőlegesen álló síkok egyben F_3F_4 , F_4F_2 , ill. F_2F_3 -ra is merőlegesek, így az $F_2F_3F_4$ síkot az $F_2F_3F_4$ háromszög magasságvonalaiiban metszik, egymást pedig abban a t_D egyenesben, amely átmegy az $F_2F_3F_4$ háromszög M_1 magasságpontján és merőleges az ABC síkra.



(Az ábra a tetraédernek az ABC síkon való merőleges vetületét mutatja, erre utalnak a síkon kívüli pontok jelei mellett álló vesszők.) Eszerint T a t_D -n van. Az $F_2F_3F_4$ háromszöget a tetraéder egyik (a D csúcsához tartozó) középmetszetének nevezve és a középmetszetet mindegyik csúcshoz elkészítve a bebizonyított állítás egy része így is kimondható: a tetraéder középmetszeteinek magasságpontjain át az illető középmetszettek síkjára állított merőlegesek egy ponton mennek át.

Ha $ABCD$ ortocentrikus, akkor $F_2F_3F_4D$ is ortocentrikus, ezért D -ből kiinduló közös magasságvonaluk átmegy az $F_2F_3F_4$, ill. ABC lap M_1 , ill. M_0 magasságpontján, azaz t_D átmegy az M_0 ponton. Eszerint T -nek az $ABCD$ tetraéder mindnégy lapján való vetülete az illető lap magasságpontja, tehát T maga azonos a tetraéder magasságpontjával.