

**I. megoldás:** Vegyük észre, hogy  $9^\circ + 81^\circ = 27^\circ + 63^\circ = 90^\circ$ ; ennek alapján a  $b$  bal oldalt  $9^\circ$  és  $27^\circ$  szinuszával és koszinuszával kifejezve, majd összevonásokkal és ismert azonosságok alkalmazásával

$$\begin{aligned} b &= \left( \frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ} + \frac{\cos 9^\circ}{\sin 9^\circ} \right) - \left( \frac{\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ} + \frac{\cos 27^\circ}{\sin 27^\circ} \right) = \frac{1}{\sin 9^\circ \cos 9^\circ} - \frac{1}{\sin 27^\circ \cos 27^\circ} = \\ &= \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ}, \end{aligned}$$

folymatolatag a  $\sin u \cos v = \frac{1}{2} [\sin(u+v) - \sin(v-u)]$  azonosságnak jobbról bal felé  $u+v = 54^\circ$ ,  $v-u = 18^\circ$ , azaz  $u = 18^\circ$ ,  $v = 36^\circ$ -kal való alkalmazásával

$$b = \frac{4 \sin 18^\circ \cos 36^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = \frac{4 \cos 36^\circ}{\sin 54^\circ} = \frac{4 \sin 54^\circ}{\sin 54^\circ} = 4,$$

és evvel bizonyításunkat befejeztük.

*Leipniker Péter* (Makó, József A. g. IV. o. t.)

*Megjegyzés.* Átalakításunk második szakaszát helyettesíthetjük avval, hogy beírjuk  $18^\circ$  és  $54^\circ$  szinuszának  $(\sqrt{5} \mp 1)$  : 4 értékét; ezekkel az első szakasz utolsó törtjében a számláló értéke 1, a nevezőé  $1/4$ .

**II. megoldás:** Felhasználhatjuk átalakításunkban a fenti észrevételen túl annak következő átrendezését is:  $27^\circ - 9^\circ = 81^\circ - 63^\circ = 18^\circ$ . Így alkalmas zárójelezés után az említett különbségek szinuszának, majd  $9^\circ + 27^\circ$  koszinuszának felismerésével

$$\begin{aligned} b &= \left( \frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ} - \frac{\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ} \right) + \left( \frac{\sin 81^\circ}{\cos 81^\circ} - \frac{\sin 63^\circ}{\cos 63^\circ} \right) = -\frac{\sin 18^\circ}{\cos 9^\circ \cos 27^\circ} + \frac{\sin 18^\circ}{\sin 9^\circ \sin 27^\circ} = \\ &= \frac{\sin 18^\circ (-\sin 9^\circ \sin 27^\circ + \cos 9^\circ \cos 27^\circ)}{\sin 9^\circ \cos 9^\circ \sin 27^\circ \cos 27^\circ} = \frac{4 \sin 18^\circ \cos 36^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ}, \end{aligned}$$

ez az alak pedig már az előbbi átalakítás során is fellépett.

*Kolonits Ferenc* (Bp. VIII., Piarista g. III. o. t.)