

Képezzük előkészítésül azt az $n \cdot n$ kéttényezős szorzatból mint tagokból álló S' összeget, melynek első n tagjában az első tényező 1, a második tényező rendre az 1, 2, ..., n szám, $n + 1$, $n + 2$, ..., $2n$ -edik tagjában az első tényező 2, a második tényező rendre az 1, 2, ..., n szám, $2n + 1$, $2n + 2$, ..., $3n$ -edik tagjában az első tényező 3, a második tényező rendre az 1, 2, ..., n szám s. i. t., végül $(n - 1)n + 1$, $(n - 1)n + 2$, ..., $(n - 1)n + n = n \cdot n$ -edik tagjában az első tényező n , a második tényező rendre az 1, 2, ..., n szám. Ez az összeg az egyenlő első tényezőknél, majd a második tényezők egyenlő összegének kiemelésével, végül a számtani sor összegképletének alkalmazásával így írható:

$$\begin{aligned} S' &= 1(1 + 2 + \dots + n) + 2(1 + 2 + \dots + n) + 3(1 + 2 + \dots + n) + \\ &\quad + \dots + n(1 + 2 + \dots + n) = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Ebben az összegben minden a feladatunkban előírt szorzat fellép, de ezeken felül felesleges tagok is fordulnak elő. Ilyenek egyrészt a két egyenlő szám szorzataként adódó tagok, vagyis a négyzetszámok 1^2 -től n^2 -ig, összegük ismert képlet szerint

$$S'' = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

másképp azok, amelyekben az első tényező nagyobb a másodiknál, mert ezek a szorzatok a tényezők felcserélt (növekvő) sorrendjével is fellépnek. Így minden előírt szorzat S' -ben kétszer szerepel, és más felesleges tag nincs benne. Ezek szerint a kívánt összeg fele S' és S'' különbségének:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(S' - S'') = \frac{n(n+1)}{4} \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2n+1}{3} \right) = \\ &= \frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{24} = \frac{n(n+1)3(n-1) \left(n + \frac{2}{3} \right)}{24} = \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}. \end{aligned}$$

(Az összevonás után kiszámítottuk a $3n^2 - n - 2$ másodfokú polinom 0-helyeit, gyökeket, majd ezek alapján a polinomot gyöktényezőinek, valamint kezdő együtthatójának, 3-nak szorzatával pótoltuk.)

Szász Domokos (Bp. V., Eötvös J. g. III. o. t.)

Megjegyzés: A felhasznált $S = (S' - S'')/2$ összefüggésre a többtagúak négyzetére vonatkozó azonosságból is rájöhettünk:

$$(1 + 2 + \dots + n)^2 = (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 2[1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n],$$

azaz $S' = S'' + 2S$.