

Kifejezésünk tagjai háromtagú mértani sorozatot alkotnak 1-gyel mint kezdő taggal és a^5 hányadossal, ennél fogva a kifejezés $a^5 \neq 1$ (azaz $a \neq 1$) esetén az ismert összegképlettel, majd az egyenlő kitevőjű hatványok különbségére vonatkozó azonosság ismételt alkalmazásával így alakítható:

$$\begin{aligned} 1 + a^5 + a^{10} &= \frac{(a^5)^3 - 1}{a^5 - 1} = \frac{(a^3)^5 - 1^5}{a^5 - 1^5} = \frac{(a^3 - 1)(a^{12} + a^9 + a^6 + a^3 + 1)}{(a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)} = \\ &= \frac{(a - 1)(a^2 + a + 1)(a^{12} + a^9 + a^6 + a^3 + 1)}{(a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)} = \\ &= (a^2 + a + 1) \frac{a^{12} + a^9 + a^6 + a^3 + 1}{a^4 + a^3 + a^2 + a + 1}. \end{aligned}$$

Az utolsó alakbeli hányadosban az osztást végrehajtva polinomot kapunk, ennek alapján

$$a^{10} + a^5 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1)$$

és ezzel eleget tettünk a feladat követelésének.

Átalakításunk az $a = 1$ esetre nem érvényes, viszont a közvetlen behelyettesítés mutatja, hogy az egyenlőség erre a kivételes esetre is fennáll.

Ujtelki Anna (Veszprém, Lovassy L. g. III. o. t.)