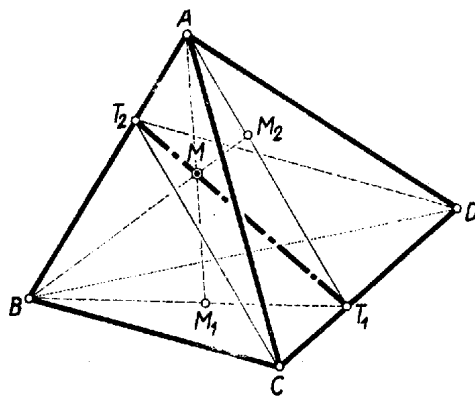


I. megoldás: Tekintsük az $ABCD$ ortocentrikus tetraéder AB és CD éleit. Minthogy ezek merőlegesek egymásra, azért mindegyiken át fektethető egy és csak egy a másikra merőleges sík; jelöljük ezeknek a CD , ill. az AB egyenessel való metszéspontját T_1 , ill. T_2 -vel. A T_1T_2 egyenes mindkét síkban benne van, ez a metszészonaluk.



Az ABT_1 síknak minden egyenese, így T_1T_2 , továbbá AT_1 és BT_1 merőleges CD -re, hasonlóan CDT_2 -nek T_1T_2 , valamint CT_2 és DT_2 egyenesei merőlegesek AB -re. Eszerint egyrészt T_1T_2 az AB és CD egyenesek mindegyikére merőleges, mindegyikét metszi, tehát ez az (egyetlen) normál tranzverzálisuk, másrészt T_1 , ill. T_2 az ACD és BCD , ill. CAB és DAB lapháromszögek AT_1 és BT_1 , ill. CT_2 és DT_2 lap-magasságainak a CD , ill. AB oldalon való talppontjai. Ezzel a feladat második állítását a vizsgált élpárra vonatkozóan bebizonyítottuk.

Minthogy egyetlen élnek sincs a többivel szemben valami megkülönböztető tulajdonsága, azért bizonyításunk bármelyik szemközti élpárra érvényes. Ugyanígy a feladat első állításának bizonyításában is elég lesz egy élpárral és normál tranzverzálisával foglalkozni.

A tetraéder A -ból vont AM_1 magassága merőleges a BCD lap síkjára, ennek minden egyenesére, így CD -re is, ennél fogva benne van az egyetlen olyan síkban, amely átmegy A -n és merőleges CD -re, vagyis ABT_1 -ben. Ugyanígy a B -ből vont BM_2 magasság is benne van ABT_1 -ben, következésképpen ez áll a tetraéder M magasságpontjára is mint AM_1 és BM_2 metszéspontjára. Hasonlóan a C és D csúcsokból vont magasságvonallal együtt a CDT_2 síkban is benne van M , ennél fogva e két síknak T_1T_2 metszészonalán is. Ezzel a feladat első állítását is bebizonyítottuk.

Szebeni András (Bp. I., Petőfi S. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Bizonyításunkból az is következik, hogy a normál tranzverzálisoknak a lapsíkokra való merőleges vetületei a lapok magasságvonalaire esnek.

II. megoldás: A normál tranzverzálisoknak M -en való áthaladását abból is beláthatjuk, hogy AM_1 merőleges a BCD síknak BT_1 egyenesére, ugyanígy BM_2 merőleges az ACD sík AT_1 egyenesére, ezért AM_1 és BM_2 egyszerre mind az $ABT_1\triangle$ -nek is egy-egy magasságvonala, ennél fogva M metszéspontjukon – amely feltevésünk szerint a tetraéder mind négy magasságának közös pontja – a háromszög harmadik magasságvonala is átmegy. Ez pedig éppen a T_1T_2 normáltranzverzális, amelynek AB -re merőleges voltát már fentebb láttuk.

Kisvölcséy Jenő (Bp. VIII., Piarista g. III. o. t.)