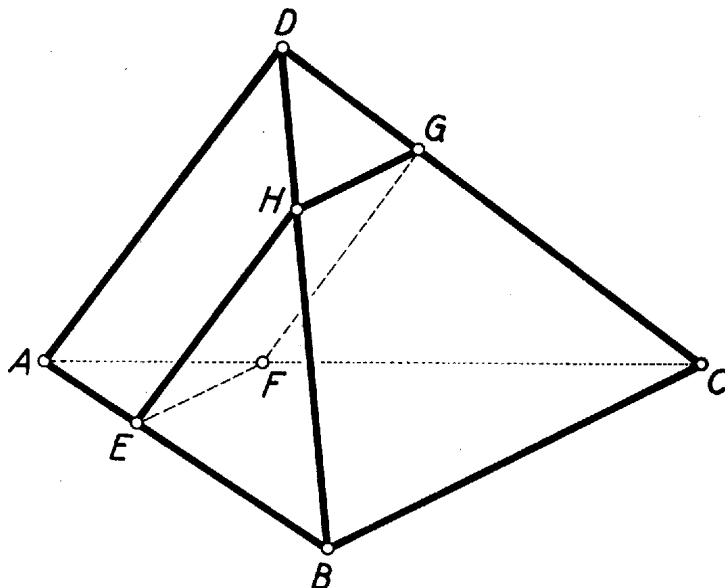


Négyszögmetszete mindenesetre van az $ABCD$ háromoldalú gúlának. Ha ugyanis az E, F, G pontokat az AB, AC , ill. CD él belsejében választjuk, akkor az $EFG = \sigma$ sík (amely egyértelműen meg van határozva, mert G nem esik az EF egyenesre, hiszen EF benne van az ABC lapsíkban, G pedig nincs benne) a BD élt is egy közbülső H pontban metszi.



Ugyanis σ nem párhuzamos a BCD lapsíkkal, mert van közös pontjuk: G , nem is azonos vele, mert E és F pontjai nincsenek benne BCD -ben, ennél fogva σ metszi BCD -t egy a G -n átmenő és a DC -től különböző s egyenesben. s -et G két félegyenesre választja szét, ezek egyike G -nél belép a $BCD\Delta$ -be. Ennek H kilépési pontja nem lehet BC -n, mert akkor σ az E, F, H pontok révén azonos lenne ABC -vel, ennél fogva H valóban a BD élen van és σ -nak a gúlával való metszésidoma az $EFGH$ négyszög.

a) Már most, hogy $EFGH$ paralelogramma legyen, ehhez szükséges és elegendő, hogy szembenfekvő oldalai párhuzamosak legyenek. Mivel pedig az EF és HG oldalak az egymással szöget bezáró ABC , ill. DBC síkban vannak (1. ábra), azért akkor és csak akkor párhuzamosak (akkor és csak akkor nem metszik egymást), ha σ nem metszi ezen síkok BC metszésvonalát, másszóval ha σ párhuzamos BC -vel. Hasonlóan EH és FG párhuzamosságához szükséges és elegendő, hogy a párhuzamos legyen AD -vel. Így az egymástól különböző AD és BC egyenesek σ állását egyértelműen meghatározzák. Konkrétan: E, F, G -t a megfelelő élek F_1, F_3, F_2 felezőpontjában választva a $\sigma_0 = F_1F_2F_3$ sík is ilyen állású (lásd a 887. feladat 1. ábráját, 3–4. sz. 112. o.). Minden a σ_0 -val párhuzamos sík – ha egyáltalán metszi a gúlát, vagyis az AB egyenessel való E metszéspontja belső pontja az AB szakasznak, paralelogrammát metsz ki belőle.

Hasonlóan látható be, hogy az AB és CD , valamint az AC és BD él párokkal párhuzamos síkok is – ha a gúla egy élt közbülső pontban metszik –, akkor paralelogrammát metszenek ki belőle. Máshogyan paralelogramma-metszet nem jön létre.

b) A rombusz speciális paralelogramma, ezért rombusz-metszeteket csak az eddig kapottak közül kereshetünk, az $EF = EH$ követelménnyel. Ilyen metszet mindig van, ugyanis míg a σ_0 -val párhuzamos síknak AB -vel való E metszéspontja A -tól B -ig halad, az alatt EF 0-tól BC -ig folytonosan növekszik, EH viszont AD -től 0-ig folytonosan csökken, eközben egyetlen helyzetben a kívánt egyenlőség beáll. Eszerint minden háromoldalú gúlának három rombusz-metszete van.

Az E pont rombuszt adó helyzetének meghatározásához AE -t és a rombusz oldalát a gúla-lapokon létrejött hasonlóságok alapján ki is számíthatjuk:

$$\frac{AE}{AB} \cdot BC = EF = EH = \frac{EB}{AB} \cdot AD = \frac{AB - AE}{AB} \cdot AD,$$

és innen

$$AE = \frac{AB \cdot AD}{AD + BC} \quad \text{továbbá} \quad EF = EH = \frac{AD \cdot BC}{AD + BC}.$$

c) $EFGH$ paralelogrammánk akkor és csak akkor specializálódik téglalappá, ha $BC \perp AD$. Ha ez teljesül, akkor minden a BC és AD élekkel párhuzamos sík – ha egyáltalán metszi a gúlát – téglalapot metsz ki belőle. Tudjuk az alább idézett cikkből (33–34. o.), hogy a háromoldalú gúlának vagy nincs egymásra merőleges szemközti élpárja, vagy egy ilyen van, vagy pedig mindhárom pár ilyen, eszerint az a) pontban nyert sík-állások közül 0, 1 vagy 3 ad téglalap-metszeteket.

Ha van téglalap-metszet, akkor a b) pont alapján közülük egy és csak egy helyzetben derékszögű rombusz, azaz négyzet lesz a síkmetszet.

Megjegyzés: Négyszög alakú metszet létezésének kérdésében arra is hivatkozhatunk, hogy paralelogramma – (sőt bizonyos esetekben téglalap-) metszet-idomot láttunk *Molnár Ferenc*nek A tetraéder nevezetes pontjairól szóló cikkében.¹ Bár az ott kimondott tétel egy bizonyos többlet-követelményt teljesítő, ún. ortocentrikus tetraéderre vonatkozik, ezt a feltevést annak kimutatásában, hogy az $F_1F_3F_2F_4$ négyszög paralelogramma, nem használja ki a cikk, ennél fogva két szembenfekvő élpárnak négy felezőpontja minden háromoldalú gúlában paralelogrammát határoz meg (és ez ortocentrikus tetraéderben téglalappá specializálódik).

¹KML. XVI. kötet 35. o. 10. ábra, 1958 február.