

I. megoldás: Írjuk fel az n számú egymástól különböző pozitív szám mértani és számtani középértékei közti ismert egyenlőtlenséget¹ az $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{n-1}$ számokra és fejezzük ki a kapott összegeket zárt alakban a számtani ill. a mértani sor összegképlete alapján:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2^{n-1}} &= \sqrt[n]{2^{0+1+2+\dots+(n-1)}} = \sqrt[n]{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} = 2^{\frac{n-1}{2}} < \\ &< \frac{1+2+2^2+\dots+2^{n-1}}{n} = \frac{2^n-1}{n},\end{aligned}$$

azaz

$$2^{\frac{n-1}{2}} < \frac{2^n-1}{n}.$$

Innen – mindkét oldalt $n > 1 > 0$ -val szorozva, majd 1-gyel növelve éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

Elekes Béla (Bp. I., Toldy F. g. III. o. t.)

Megjegyzés: Hasonlóan bizonyítható, hogy az adott egyenlőtlenségben 2-nek (mint alapnak) bármely $a > 2$ számmal való helyettesítésével adódó

$$1 + na^{\frac{n-1}{2}} < a^n$$

egyenlőtlenség is érvényes minden $n > 1$ egész számra; a módosulás csak annyi, hogy az $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$ összeg zárt alakjából az $a - 1 > 1$ nevezőt elhagyjuk, és evvel a jobb oldal még nagyobbá válik.

Megyesi László (Makó, József A. g. IV. o. t.)

II. megoldás: Az egyenlőtlenség helyes voltát a teljes indukció módszerével bizonyítjuk. $n = 2$ és $n = 3$ -ra az állítás helyes, mert a helyettesítéssel adódó $1 + 2\sqrt{2} < 4$ és $7 < 8$ egyenlőtlenségek fennállanak. Feltesszük, hogy n helyén valamely $k \geq 3$ számra igaz az állítás:

$$(1) \quad 1 + k \cdot 2^{\frac{k-1}{2}} < 2^k,$$

és bebizonyítjuk, hogy akkor n helyén az 1-gyel nagyobb $k+1$ -gyel is igaz:

$$(2) \quad 1 + (k+1)2^{\frac{k}{2}} < 2^{k+1}.$$

A (2) jobb oldalát (1) felhasználásával így alakíthatjuk át:

$$(3) \quad 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \left(1 + k \cdot 2^{\frac{k-1}{2}} \right) = 2 + k\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{k}{2}} > 1 + k\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{k}{2}}.$$

Itt a jobb oldal (2) bal oldalától csak abban tér el, hogy az itteni $k\sqrt{2}$ szorzó helyén ott $k+1$ áll. Ámde ezek között a

$$k\sqrt{2} > k+1$$

egyenlőtlenség áll, amely a minden $k \geq 3$ -ra érvényes

$$\sqrt{2} > 1 + \frac{1}{k}$$

egyenlőtlenségnek k -val való szorzásával áll elő. Eszerint (3) utolsó tagjában $k\sqrt{2}$ helyett $k+1$ -et írva az egyenlőtlenség még inkább áll, vagyis (2) valóban helyes.

Hajna János (Pécs, Széchenyi I. g. II. o. t.)

¹Lásd pl. *Kürschák-Hajós-Neukomm-Surányi*: Matematikai Versenytételek I. rész, Tankönyvkiadó, 1955, 111. o.