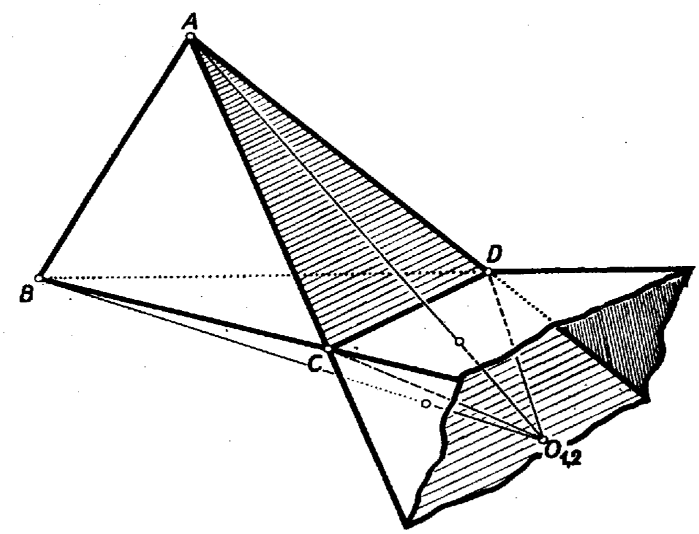
I. megoldás: Vegyük észre a hasonlóságot egyrészt a bizonyítandó, másrészt a 878. feladatban bebizonyított összefüggések között; ennek alapján átvehetjük az ott használt bizonyítási módszereket.

Láttuk a külső érintő gömbök vizsgálatánál,[1] hogy a tetraéder két szemközti éléhez, pl. az AB-hez és a CD-hez tartozó vályúszerű térrészek közül csak egyikben lehet külső érintő gömb. Tegyük fel, hogy a CD élhez tartozó vályúban van külső érintő gömb. Kössük össze ennek O_{12} középpontját A, B, C, D-vel. Így ahhoz a négy újabb tetraéderhez jutunk, melyeknek közös csúcsa O_{12} és evvel szemközti lapjuk az eredeti tetraéder egy-egy lapja.



1. ábra

Az O_{12} ből kiinduló magasságvonal hossza mindegyikben ϱ_{12}. O_{12}-ből a CD-ben összefutó BCD és ACD lapoknak a külső oldalát látjuk, ezért, ha itt is az A, B, C, D és a gömbközéppont által meghatározott konvex test köbtartalmát tekintjük, akkor ezt az eredeti, valamint a $BCDO_{12}$ és az $ACDO_{12}$ tetraéderek köbtartalmának összege adja. Másrészt O_{12} ből az egymást AB-ben metsző ABD és ABC lapoknak a belső oldalát látjuk (ti. BCD-t és ACD-t átlátszónak tekintve), ennélfogva az $ABDO_{12}$ és $ABCO_{12}$ tetraéderek együtt ugyanazt a teret töltik ki, mint az előbbi három tetraéder. Ebből; az eredeti tetraéder köbtartalmát K-val, az A, B, C, D csúccsal szemben fekvő lapjának területét t_1, t_2, t_3, t_4-gyel jelölve:

$$K+\frac{t_1\varrho_{12}}{3}+\frac{t_2\varrho_{12}}{3}=\frac{t_3\varrho_{12}}{3}+\frac{t_4\varrho_{12}}{3}.$$

Innen ϱ_{12} reciprokát kifejezve:

$$\frac{1}{\varrho_{12}}=\frac{t_3}{3K}+\frac{t_4}{3K}-\frac{t_1}{3K}-\frac{t_2}{3K}. \tag{1}$$

Itt a jobboldali hányadosokat kifejezhetjük a (felbontatlan)tetraéder köbtartalmának képlete alapján a megfelelő magasságvonalak hosszával:

$$K=\frac{t_i m_i}{3}\text{-ból}\qquad \frac{t_i}{3K}=\frac{1}{m_i},\qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{2}$$

Ezeket (1)-be helyettesítve

$$\frac{1}{\varrho_{12}}=\frac{1}{m_3}+\frac{1}{m_4}-\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}, \tag{3}$$

vagyis *b)*-nek azt az esetét kapjuk, amelyben a bal oldal előtt + jel áll.

A másik eset hasonlóan adódik abból a feltevésből, hogy az AB élhez tartozó vályúban van külső érintő gömb. Ekkor a felsorolt lap-párok ill. a rajtuk álló, O_{12} csúcsú tetraéder-párok szerepet cserélnek, (3) megfelelőjében mindegyik magasság ellentett jellel adódik, és *b)*-nek második esetét az egyenlőségnek (-1)-gyel való szorzásával kapjuk meg.

a) igazolásához helyettesítsük a jobb oldalon a sugarak reciprok értékét a 878. feladatbeli *c)* és a megfelelő további összefüggések alapján a magasságok reciprok értékével (l. a megoldásban (3) alatt, ezen szám 98. o.). Így

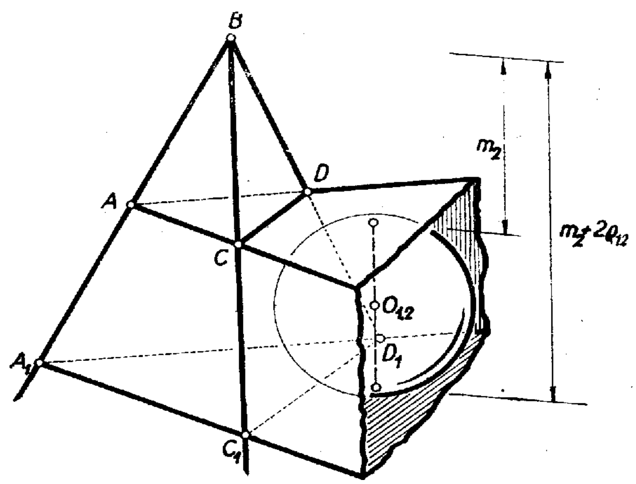
$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}-\frac{1}{\varrho_3}-\frac{1}{\varrho_4}=\frac{-1+1-1-1}{m_1}+\frac{1-1-1-1}{m_2}+\frac{1+1+1-1}{m_3}+$$
$$+\frac{1+1-1+1}{m_4}=2\left(\frac{1}{m_3}+\frac{1}{m_4}-\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}\right),$$

[1] *Molnár Ferenc:* A tetraéder nevezetes pontjairól (1. közlemény), KML. XVI. kötet 4. o., 1958 január.

ez pedig (3) szerint valóban egyenlő $\pm\frac{2}{\varrho_{12}}$-vel.

Andréka Bertalan (Győr, Czuczor G. g. III. o. t.)

II. megoldás: A *b)* összefüggés más igazolása a következő: Tegyük fel, hogy a CD élhez tartozó vályúban van külső érintőgömb, vagyis olyan, amely az ABC, ABD lapok síkját ugyanazon az oldalukon érinti, amelyen a tetraéder van, a BCD, ACD lapok síkját pedig a másik oldalról, mint amelyen a tetraéder van, és jelöljük e gömb középpontját O_{12}-vel. Fektessünk ehhez az ACD lappal párhuzamosan érintősíkot és jelöljük e síknak a BA, BC, BD félegyenesekkel való metszéspontjait sorra A_1, C_1, D_1-gyel (2. ábra).



2. ábra

A létrejött $A_1BC_1D_1$ tetraéder hasonló $ABCD$-hez, B-ból kiinduló magasságáinak hossza $m_2 + 2\varrho_{12}$. Gömbünk $A_1BC_1D_1$-nek is mind a négy lapsík ját érinti, de csak a BC_1D_1 lapot érinti kívülről, tehát ebben a tetraéderben azt a szerepet játssza, amit $ABCD$-ben a ϱ_1 sugarú gömb. E gömbök sugarának és a B csúcsból húzott magasságoknak aránya a hasonlóság folytán egyenlő:

$$\frac{\varrho_{12}}{\varrho_1} = \frac{m_2 + 2\varrho_{12}}{m_2} = 1 + \frac{2\varrho_{12}}{m_2},$$

innen ϱ_{12} reciprokát kifejezve:

$$\frac{1}{\varrho_{12}} = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{2}{m_2},$$

végül a 878. feladat *c)* összefüggése alapján ismét (3) adódik.

Kristóf László (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. IV. o. t.)

Megjegyzések: Igazolhatjuk a *b)* összefüggést a 878. feladat megjegyzésében idézett tétel alkalmazásával is.

Bizonyításunkból az is kiolvasható, hogy akkor van külső érintő gömb a CD élhez tartozó vályúban, ha (3) jobb oldala pozitív, vagyis, ha

$$\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} > \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2},$$

másképpen (2) felhasználásával, ha

$$t_3 + t_4 > t_1 + t_2.$$

Általában: a tetraéder valamely éléhez tartozó vályúszerű térrészben akkor és csak akkor van külső érintő gömb, ha az élben találkozó lapok területének összege kisebb a másik két lap területösszegénél. Ha e két összeg egyenlő, akkor a két szemközti él egyikének vályúszerű térrészében sincs érintő gömb; emiatt van csak öt érintő gömbje a szabályos tetraéder lapsíkjainak.