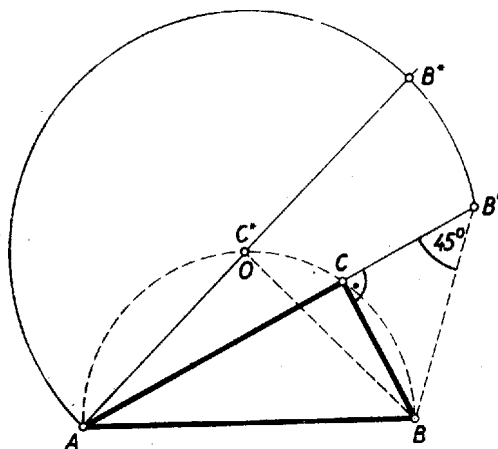


I. megoldás: Kérdésünk így is fogalmazható: a szóbanforgó háromszögek melyikében maximális a két befogó összege? Ezen összeg előállítására végeztünk rá egy az állandó AB átfogón álló tetszés szerinti ABC derékszögű háromszög AC befogójának C -n túl való meghosszabbítására a CB -vel egyenlő CB' szakaszt és vizsgáljuk $AB' = AC + CB$ változását (1. ábra).



1. ábra

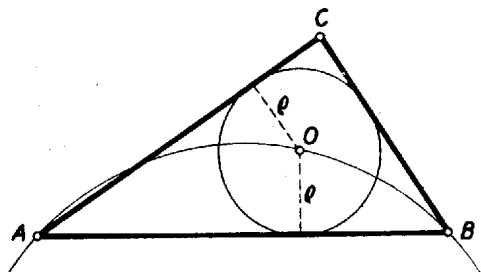
Az egyenlő szárú derékszögű CBB' háromszög révén $\angle AB'B = 45^\circ$, eszerint B' rajta van AB -nek 45° nyílású látószögműködésén. E körív O középpontjából AB látószöge $2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$, eszerint O az AB átmérőjű Thales-félkörnek az AB felező merőlegesével való metszéspontja. AB' a látószögműködés egy részének húrja, ennél fogva akkor maximális, ha B' az A -nak a körívbeli átellenes pontjába, B^* -ba esik, vagyis AB^* átmegy O -n. Ekkor a megfelelő C^* a B -ből AB^* -ra bocsátott merőleges talppontjába, O -ba esik, és így a keresett maximális kerületű háromszög az ABO egyenlő szárú derékszögű háromszög.

Beke Géza (Hatvan, Bajza J. g. III. o. t.)

Megjegyzés: Hasonlóan látható be, hogy az adott alappal és ezzel szemben tetszés szerinti adott szöggel bíró háromszögek közül is az egyenlő szárúnak van maximális kerülete.

II. megoldás: Ismert összefüggés szerint derékszögű háromszögben a szokásos jelölésekkel: $a + b = c + 2\rho$, ahol ρ a beírt kör sugara. Így $a + b + c = 2c + 2\rho$ ugyanakkor maximális, mint ez a sugár.

Másrészt tudjuk (I. gimn. tankönyv), hogy a beírt kör O középpontja azon a köríven van, amelynek pontjaiból az AB szakasz látószöge 135° (2. ábra).



2. ábra

Nilván akkor legnagyobb ρ , ha O ezen körív felezőpontjában, AB felezőmerőlegesén van; ekkor pedig szimmetria folytán a háromszög egyenlő szárú.

Gaál Sándor (Veszprém, Lovassy L. g. III. o. t.)

III. megoldás: $a + b + c$ akkor maximális, amikor $a + b$; ez akkor, amikor $(a + b)^2$; ez – az

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab = c^2 + 4t = c^2 + 2cm_c$$

átalakítás alapján – akkor, amikor ab , ill. t , cm_c ill. m_c maximális. Már most m_c legnagyobb értéke a Thales félkörben $\frac{c}{2}$ és ezzel a háromszög egyenlő szárú, a kerülete $c(1 + \sqrt{2})$.

Máthé Csaba (Győr, Révay M. g. II. o. t.)

IV. megoldás: A III. megoldáshoz kapcsolódva ab -re a következő egyenlőtlenség áll:

$$ab = \sqrt{a^2b^2} \leq \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{c^2}{2};$$

ab fel is veszi a legnagyobb értéket, és $ab = \frac{c^2}{2}$ -ből $a = b$.

Nagy Balázs (Eger, Dobó I. g. IV. o. t.)

V. megoldás: Az $y = a + b + c = c(1 + \sin \alpha + \cos \alpha)$ függvénynek ugyanott van maximuma, ahol a $z = \sin \alpha + \cos \alpha$ -nak, ill. – mivel itt $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ folytán mindkét tag pozitív – ahol $v = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$ -nak. Ez $2\alpha = 90^\circ$ -nál következik be, akkor pedig $\alpha = 45^\circ = \beta$.

Ducza Lajos (Székesfehérvár, József A. g. IV. o. t.)

VI. megoldás: Az előbbi z függvény maximumát így is megkaphatjuk:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sin \alpha + \sin(90^\circ - \alpha) = 2 \sin \frac{\alpha + 90^\circ - \alpha}{2} \cos \frac{\alpha - (90^\circ - \alpha)}{2} = \sqrt{2} \cos(\alpha - 45^\circ)$$

maximális, ha $\cos(\alpha - 45^\circ) = 1$, $\alpha - 45^\circ = 0^\circ$, $\alpha = 45^\circ = \beta$.

Tusnádny László (Sátoraljaújhely, Kossuth L. g. IV. o. t.)