

I. megoldás: Alkalmazzuk az $1, 2, \dots, n$ természetes számokra a számtani és a mértani közép között fennálló egyenlőtlenséget:

$$(1) \quad \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{1 + 2 + \dots + n}{n}.$$

Észrevesszük, hogy a gyökjel alatt $n!$ áll; a számlálót a számtani sor összegképlete alapján átalakítjuk:

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Mindkét oldal pozitív, ezért n -edik hatványra emelve a két oldal nagyságviszonya változatlan marad:

$$n! \leq \frac{(n+1)^n}{2^n},$$

innen

$$(2) \quad 2^n \cdot n! \leq (n+1)^n,$$

és ez a bizonyítandó állítástól csak abban különbözik, hogy a kétoldali számok egyenlőségét is megengedi. Valóban (1)-ben és így (2)-ben is állhat egyenlőség is, éspedig $n = 1$ mellett.

Fritz József (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. I. o. t.)

II. megoldás: A bizonyítást a teljes indukció módszerével is végezhetjük. $n = 1$ -re a két oldal között egyenlőség áll; $n = 2$ -re teljesül az állítás, ugyanis

$$2^2 \cdot 2! = 8 < (2+1)^2 = 9.$$

Tegyük fel, hogy n helyén valamely $k-1 \geq 2$ -vel igaz az állítás, vagyis

$$(3) \quad 2^{k-1} (k-1)! < k^{k-1}.$$

Bebizonyítjuk, hogy n helyén az 1-gyel nagyobb k -ra is igaz. Éspedig úgy, hogy egyrészt a (3)-ból $2k > 0$ -val való szorzás útján előálló

$$(4) \quad 2^k k! > 2k^k$$

jobb oldala, másrészt az igazolandó egyenlőtlenség (n helyén k -val) jobb oldala között áll:

$$(5) \quad 2k^k < (k+1)^k.$$

Ugyanis a binomiális képlet szerint

$$(6) \quad \frac{(k+1)^k}{k^k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = 1^k + k \cdot 1^{k-1} \cdot \frac{1}{k} + K = 2 + K > 2,$$

mert itt K az $\frac{1}{k}$ -nak k -adfokú, csupa pozitív tagokból, szám szerint $(k+1) - 2 = k-1 \geq 2$ tagból álló polinomja, vagyis pozitív szám, – és (6)-ból, csak a szélső tagokat tekintve átszorzással (5) adódik. Most már (4) és (5) egybekapcsolásával

$$2^k \cdot k! < 2k^k < (k+1)^k,$$

amit bizonyítani akartunk.

Sárközy András (Gyöngyös, Vak Bottyán g. IV. o. t.)