

I. megoldás: Megmutatjuk, hogy létezik olyan n tagú, $d = 2$ különbségű számtani sorozat, melynek kezdő tagja $a_1 = 2k + 1$ alakú páratlan szám és amelynek összege n^p . E sorozat utolsó tagja

$$a_n = 2k + 1 + 2(n - 1) = 2(k + n) - 1,$$

ennélfogva azt kell belátnunk, hogy van olyan egész k , amelyre:

$$n^p = \frac{n}{2}(2k + 1 + 2(k + n) - 1) = n(2k + n).$$

Valóban, innen

$$k = \frac{n(n^{p-2} - 1)}{2},$$

és itt a számláló páros, mert vagy n osztható 2-vel, vagy a zárójelbeli különbség (ugyanis az utóbbi – páratlan n esetén – két páratlan szám különbsége), tehát k -ra mindenképpen egész számot kapunk.

Marton Katalin (Bp. VI., Varga Katalin gyak. lg. II. o. t.)

II. megoldás: Írjuk n^p -t n egyenlő tag összegeként:

$$(1) \quad n^p = n \cdot n^{p-1} = n^{p-1} + n^{p-1} + \dots + n^{p-1}.$$

Megmutatjuk, hogy itt a szimmetrikus helyzetű tagokból (első és utolsó, második és utolsó előtti stb.) párokat alkotva és a párok egyik tagját alkalmas számmal csökkentve, a másikat ugyanannyival növelve (ami által összegük értéke nyilván nem változik) lehet az összeget úgy alakítani, hogy tagjai egymásutáni páratlan számok legyenek.

Mivel n -nek páros vagy páratlan volta szerint az említett tagpárok megalkotásának utolsó lépése máshogyan alakul, azért e két lehetőséget külön vizsgáljuk.

a) Ha n páros, akkor minden tagnak van párja, és összegünk tagjai is párosak, mert $p - 1 \geq 1$. Csökkentsük, ill. növeljük az (1) összeg középső párjának tagjait, vagyis az $\frac{n}{2}$ és az $\frac{n}{2} + 1 = \frac{n+2}{2}$ sorszámú tagot 1-gyel, így $n^{p-1} - 1$ és $n^{p-1} + 1$ egymásután következő páratlan számok. Hasonlóan az $\frac{n}{2} - 1$ és az $\frac{n}{2} + \frac{n+2}{2} + 1$ sorszámú tagot a következő páratlan számmal: 3-mal, azaz $2 \cdot 1 + 1$ -gyel csökkentsük ill. növeljük; az $\frac{n}{2} - 2$ -ediket és az $\frac{n+2}{2} + 2$ -ediket, a páratlan számok sorozatában következő 5-tel, azaz $2 \cdot 2 + 1$ -gyel s i. t., végül az $\frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2} - 1\right) = 1$ és az $\frac{n+2}{2} + \left(\frac{n}{2} - 1\right) = n$ sorszámú tagot (a két szélső tagot) $2 \left(\frac{n}{2} - 1\right) + 1 = n - 1$ -gyel. Az így átalakított, növekedő tagokból álló

$$\begin{aligned} n^p &= (n^{p-1} - n + 1) + (n^{p-1} - n + 3) + \dots + (n^{p-1} - 3) + (n^{p-1} - 1) + \\ &\quad + (n^{p-1} + 1) + (n^{p-1} + 3) + \dots + (n^{p-1} + n - 3) + (n^{p-1} + n - 1) \end{aligned}$$

összeg minden tagja páratlan, bármely két egymásutáni tagjának különbsége 2, és tagjainak száma:

$$1 + \frac{(n^p + n - 1) - (n^p - n + 1)}{2} = n.$$

b) Ha n páratlan, akkor (1) középső tagjának nem jut pár, a párok száma $\frac{n-1}{2}$, a középső tag sorszáma $\frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$ a vele szomszédosaké pedig $\frac{n-1}{2}$, ill. $\frac{n+3}{2}$. Most minden tagja páratlan az összegnek, ezért középről kifelé haladva egymás után 2-vel, 4-gyel, $\dots$, $2 \frac{n-1}{2} = n - 1$ -gyel csökkentjük, ill. növeljük a párok tagjait és így

$$\begin{aligned} n^p &= (n^{p-1} - n + 1) + (n^{p-1} - n + 3) + \dots + (n^{p-1} - 4) + (n^{p-1} - 2) + \\ &\quad + n^{p-1} + (n^{p-1} + 2) + (n^{p-1} + 4) + \dots + (n^{p-1} + n - 3) + (n^{p-1} + n - 1). \end{aligned}$$

Az a) eset mintájára könnyű belátni, hogy ez a felbontás is megfelel mindegyik követelménynek.

Komlóssy György (Szolnok, Verseygy F. g. II. o. t.)