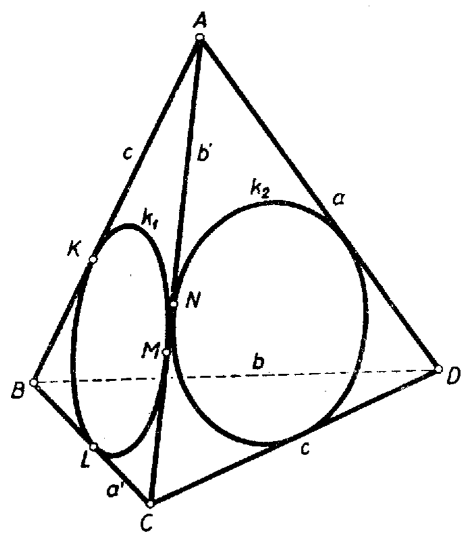
I. megoldás: Láttuk a tetraéderről szóló cikkben,[1] hogy a három szemközti élpár páronkénti összegeinek megegyezése *szükséges feltétele* (bebizonyítható következménye) az élérintő gömb létezésének. Most a feltétel *elegendő* voltát kell bizonyítanunk. Hogy bizonyításunkhoz kiindulópontot kapjunk, megemlítjük az élérintő gömb létezésének még egy következményét. Nyilvánvaló, hogy ha van a tetraédernek élérintő gömbje, akkor ezt mindegyik lapsík körben metszi, és a metszési kör azonos a megfelelő lapháromszög beírt körével; továbbá, hogy bármelyik két ilyen kör egymást is érinti. (Különböző síkokban fekvő körökre is akkor mondjuk, hogy érintik egymást, ha van közös pontjuk és abban közös az érintő egyenesük.)

Megmutatjuk, hogy a tetraédernek a feltevés szerinti

$$a + a' = b + b' = c + c' \tag{1}$$

tulajdonságából (l. a jelöléseket az ábrán) ugyancsak következik, hogy bármelyik két lapháromszögéhez tartozó beírt körök érintik egymást.



Tekintsük pl. az ABC és ACD háromszögek k_1, ill. k_2 beírt körét és jelöljük az AC élen levő érintési pontjukat M, ill. N-nel, az ABC, ill. ACD háromszög félkerületét s_1, ill. s_2-vel. Ekkor ismert összefüggés szerint

$$AM = s_1 - a = \frac{b' + (c' - a')}{2},$$
$$AN = s_2 - c = \frac{b' + (a - c)}{2},$$

és innen, mivel (1) folytán a két zárójelbeli különbség egyenlő, $AM = AN$ adódik, azaz M és N egybeesnek, k_1 és k_2 valóban érintik egymást, és ez áll bármelyik két beírt körre is.

A négy tetraéderlaphoz tartozó négy beírt kör egy gömbön van. Ugyanis pl. a k_1 beírt körön átmenő (e kört tartalmazó) gömbök középpontjának mértani helye a k_1 középpontjában az ABC lapsíkra merőleges e_1 egyenes (a kör „tengelye”). Bármelyik két ilyen tengely metszi egymást, mert egy síkban vannak – pl. e_1 és az ACD lapsíkra merőleges e_2 az $M \equiv N$ érintési ponton átmenő, az AC élre merőleges síkban, – és nem párhuzamosak (ugyanis szögük méri az ABC és ACD lapsíkok szögét, ami sem nem $0°$, sem nem $180°$). Ennélfogva az e_1, e_2, e_3, e_4 tengelyek a 471. gyakorlatban bebizonyított tétel szerint egy O pontban metszik egymást (ugyanis nem lehetnek egy síkban, mert különben a rájuk merőleges négy lapsík merőlegesen állana a tengelyek közös síkjára, akkor pedig ugyanez állana a lapsíkok páronkénti metszésvonalaira, az élek egyeneseseire is, vagyis mind a hat él párhuzamos volna). Ez az O pont a négy beírt kör páronkénti, összesen *hat* érintkezési pontjától ugyanakkora távolságban van. Bármelyik lap beírt körének *három* érintési pontjára nyilván igaz ez – pl. az ABC lapon K, L, M-re $OK = OL = OM$ –, ezek viszont a további három lapból még egy-egyben játsszák ugyanezt a szerepet, és így az egyenlőség átjut O-nak a további három él-érintési ponttól való távolságára. Végül az OK, OL, ill. OM szakasz merőleges az AB, BC, ill. AD élre, mert pl. OM a fentiek szerint benne van e_1 és e_2 közös síkjában, és ez áll a további esetekben is, – ennélfogva az O körül OK sugárral írt gömb valóban érinti a tetraéder valamennyi élét. Ezzel bizonyításunkat befejeztük.

Megyesi László (Makó, József A. g. IV. o. t.)

II. megoldás: Vegyünk át az I. megoldásból annyit, hogy pl. az A csúcsban találkozó három háromszöglap beírt körei páronként érintik egymást éspedig különböző pontban. Másrészt ez a három kör nincs egy síkban. Ezekből már

[1] *Molnár Ferenc:* A tetraéder nevezetes pontjairól (I. közlemény), K. M. L. XVI. kötet 1–6. o. 1958 január.

következik,[2] hogy egy gömbön vannak. Ez a gömb a három háromszög oldalaiként a tetraédernek mind a hat élét érinti.

Bollobás Béla (Bp. V., Apáczai Csere J. gyak. g. I. o. t.)

[2]Lásd: *Hajós-Neukornm-Surányi:* Matematikai Versenytételek II. rész. Tankönyvkiadó 1957, 57. o., 1937. évi 2. feladat.