

I. megoldás. Kössük össze a tetraéder beírt gömbjének O középpontját a csúcsokkal, így négy új tetraéder keletkezik: $OBCD$, $OCDA$, $ODAB$ és $OABC$. Minthogy O biztosan belső pontja a tetraédernek, azért az OAB , OAC , OAD , OBC , OB és OC háromszöglapok mentén való bevágással a tetraéder (mint tömör test) a négy új tetraéderre esik szét, és így K köbtartalma e részek köbtartalmának összege. Kézenfekvő erre a célra a részek köbtartalmát úgy kifejezni, hogy alapnak mindig az O -val szemben fekvő lapot vesszük; egyrészt, mert ezek az eredeti tetraéderrel közösek, másrészt mert így a magasság mindnégy résztestben ugyanaz, éspedig ϱ . Így, az A , B , C , ill. D csúccsal szemben fekvő lapok területét t_1 , t_2 , t_3 , ill. t_4 -gyel jelölve

$$K = \frac{t_1 \varrho}{3} + \frac{t_2 \varrho}{3} + \frac{t_3 \varrho}{3} + \frac{t_4 \varrho}{3}.$$

Fejezzük ki innen ϱ reciprokát

$$(1) \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{t_1}{3K} + \frac{t_2}{3K} + \frac{t_3}{3K} + \frac{t_4}{3K}.$$

A jobboldali hányadosokat a (felbontatlan) tetraéder köbtartalmának képlete alapján is kifejezhetjük a megfelelő magasságvonalak hosszával:

$$(2) \quad K = \frac{t_i m_i}{3} \text{-ből} \quad \frac{t_i}{3K} = \frac{1}{m_i}, \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Ezeket (1)-be behelyettesítve a b) összefüggést kapjuk.

A c) összefüggés igazolása céljára kössük össze A , B , C , D -t a BCD lapot kívülről érintő gömb O_1 középpontjával. Így ismét négy újabb tetraéderhez jutunk, ezekben O_1 közös csúcs, O_1 -gyel szemközt mindegyikben az eredeti tetraédernek egy lapja fekszik, és az O_1 -ből kiinduló magasságvonal hossza mindegyikben ϱ_1 . Mivel O_1 a BCD lapnak az A -val ellentétes oldalán van, a többi három lapnak viszont ugyanazon az oldalán, mint az eredeti tetraéder megfelelő szemközti csúcsa, azért az $O_1 BCD$ és az $ABCD$ tetraéderek együtt ugyanazt a teret töltik ki, mint a további bármely új tetraéder együtt. Ennek alapján az előzőkhöz hasonlóan:

$$K = \frac{t_2 \varrho_1}{3} + \frac{t_3 \varrho_1}{3} + \frac{t_4 \varrho_1}{3} - \frac{t_1 \varrho_1}{3},$$

majd ϱ_1 reciprokát kifejezve:

$$\frac{1}{\varrho_1} = -\frac{t_1}{3K} + \frac{t_2}{3K} + \frac{t_3}{3K} + \frac{t_4}{3K},$$

és innen a (2) kifejezések helyettesítésével c) adódik.

A c)-hez hasonló további három összefüggés a következő

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\varrho_2} &= \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}, \\ \frac{1}{\varrho_3} &= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}, \\ \frac{1}{\varrho_4} &= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} - \frac{1}{m_4}. \end{aligned}$$

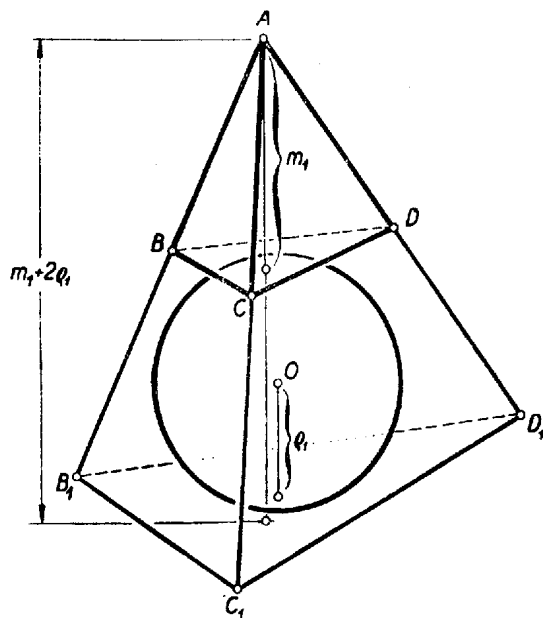
Ezeket c)-vel összeadva, majd b) figyelembevételével

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_4} = 2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} \right) = \frac{2}{\varrho},$$

és evvel az a) összefüggést is igazoltuk.

Szodoray Erzsébet (Debrecen, Kossuth L. lg. IV. o. t.)

II. megoldás: A c) összefüggést így is igazolhatjuk: fektessünk a BCD lappal párhuzamos érintősíkot a BCD lapot kívülről érintő O középső gömbhöz, és jelöljük e síknak az AB , AC , AD egyenesekkel való metszéspontjait sorra B_1 , C_1 , D_1 -gyel (1. ábra).



A kapott $AB_1C_1D_1$ tetraéder nyilván hasonló az $ABCD$ -hez, a $B_1C_1D_1$ lapjához tartozó magassága $m_1 + 2\rho_1$, végül az O gömb ennek beírt gömbje. Mivel a megfelelő hosszanti méretek aránya a hasonlóságból következően megegyezik, így

$$\frac{\rho_1}{\varrho} = \frac{m_1 + 2\rho_1}{m_1} = 1 + \frac{2\rho_1}{m_1},$$

és ebből

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\varrho} - \frac{2}{m_1}.$$

Itt a jobb oldalon a $b)$ jobb oldalának behelyettesítése és összevonás után $c)$ jobb oldalát kapjuk.

Várallyay László (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. IV. o. t.)

Megjegyzés: A $b)$ és $c)$ összefüggés speciális esete egy a fentiekhez hasonlóan igazolható általánosabb összefüggésnek. Ismeretes, hogy ha az $ABCD$ tetraéder belsejében levő tetszőleges P pont távolsága az A, B, C, D csúcsokkal szemközti lapoktól rendre p_a, p_b, p_c, p_d , továbbá az A, B, C, D csúcsokból kiinduló magasságvonalak hossza m_a, m_b, m_c, m_d , akkor

$$\frac{p_a}{m_a} + \frac{p_b}{m_b} + \frac{p_c}{m_c} + \frac{p_d}{m_d} = 1.$$

Ha viszont P a tetraéderen kívül van, akkor minden olyan laptól vett távolsága, amelynek a tetraéderrel ellentétes oldalán helyezkedik el, az egyenlőségben negatív előjellel veendő (ilyen három is lehet; lásd K. M. L., 1(1947–48), 123. oldal, 133. feladat). Az állítás könnyen bizonyítható résztetraéderekre bontással.

Írjuk fel ezt az összefüggést a beírt gömb középpontjára, majd a BCD lapot kívülről érintő gömb középpontjára. Ekkor

$$\frac{\varrho}{m_1} + \frac{\varrho}{m_2} + \frac{\varrho}{m_3} + \frac{\varrho}{m_4} = 1, \quad \text{ill.} \quad -\frac{\rho_1}{m_1} + \frac{\rho_1}{m_2} + \frac{\rho_1}{m_3} + \frac{\rho_1}{m_4} = 1,$$

és innen ϱ , ill. ρ_1 -gyel való osztással $b)$ ill. $c)$ adódik.

Bärnkopf Rudolf (Bp. IX., József A. gépip. t. III. o. t.)