

I. megoldás: A feltevésből következő

$$\cos \alpha = \cos(180^\circ - \beta - \gamma) = -\cos(\beta + \gamma) = \sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma$$

kifejezés behelyettesítésével, átcsoportosítással és további ismert azonosságok felhasználásával az első kifejezés értéke:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma + 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \beta \cos \gamma}{\sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{\sin^2 \beta (1 - \sin^2 \gamma) + \sin^2 \gamma (1 - \sin^2 \beta) + 2 \sin \beta \cos \gamma \cos \beta \sin \gamma}{\sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{\sin^2 \beta \cos^2 \gamma + 2 \sin \beta \cos \gamma \cos \beta \sin \gamma + \cos^2 \beta \sin^2 \gamma}{\sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{(\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma)^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2(\beta + \gamma)}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2(180^\circ - \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a második kifejezés úgy állítható elő az elsőből, hogy α , β , γ helyére minden előfordulásukban β , γ , α -t írunk, és ugyanígy áll elő a harmadik kifejezés is a másodikból, végül az első is a harmadikból (ciklikus felcserélés). Ennek alapján a további két kifejezés értéke is 1, és így egymással valóban egyenlők.

Elekes Béla (Bp. I., Toldy Ferenc g. III. o. t.)

II. megoldás: Írjuk az első kifejezést a következő alakba:

$$\left(\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}\right)^2 - 2 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \cos \alpha,$$

helyettesítsük benne a hányadosokat a szinusztétel alapján a megfelelő két oldal hányadosával, majd összevonás után ismerjük fel a számlálóban a^2 -nek a koszinusz tétel szerinti kifejezését. Így értéke:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 2 \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1,$$

és ugyanez áll a második és a harmadik kifejezésre is.

Sármezei Ildikó (Bp. I., Szilágyi Erzsébet lg. III. o. t.)

További megoldók a szögek szinusza, az oldalak és a körülírt kör átmérője közti összefüggéssel mutatták meg, hogy mindegyik kifejezés értéke 1, vagy pedig az átmérő helyett a háromszög területét vonták be átmenetileg az átalakításba.