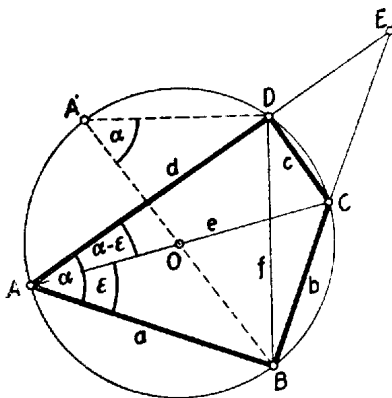


I. megoldás: Négyszögünk húrnégyszög, mert két szemben fekvő szögének összege $\beta + \delta = 180^\circ$, és a keresett AC átló átmérője a körülírt körnek, mert β és δ ennek látószöge a B , D pontból. A további jelöléseket mindhárom megoldás céljára lásd az ábrán.



Az AC átlót mint az adatokkal meghatározott ABD háromszög körülírt körének átmérőjét számítjuk az $A'BD$ derékszögű háromszögből:

$$(1) \quad AC = 2r = \frac{f}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha}}{\sin \alpha}.$$

(Meg lehet mutatni, hogy a felhasznált összefüggés $\alpha \geq 90^\circ$ esetén is érvényes.)

Elbert Árpád (Kaposvár, közg. t. IV. o. t.)

II. megoldás: Határozzuk meg először AC -nek AB -vel bezárt ε szögét. Az ABC és ACD derékszögű háromszögekből

$$(2) \quad AC = \frac{a}{\cos \varepsilon} = \frac{d}{\cos(\alpha - \varepsilon)}.$$

Innen a második nevezőt kifejtve rendezéssel olyan egyenletet kapunk, amelynek minden tagjában vagy $\sin \varepsilon$ vagy $\cos \varepsilon$ szerepel. Célszerű ilyenkor elsőnek $\operatorname{tg} \varepsilon$ -t kifejezni:

$$(3) \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{d - a \cos \alpha}{a \sin \alpha}.$$

Ebből a (2)-beli első kifejezés céljára:

$$\frac{1}{\cos \varepsilon} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varepsilon + 1} = \frac{\sqrt{(d - a \cos \alpha)^2 + a^2 \sin^2 \alpha}}{a \sin \alpha}.$$

(A négyzetgyök pozitívnak veendő, mert ε biztosan pozitív hegyesszög.) Ezt átalakítva, majd (2)-be beírva ismét (1)-re jutunk.

Győry Kálmán (Ózd, József Attila g. IV. o. t.)

III. megoldás: Négyszögünkre érvényes Ptolemaios tétele:

$$ac + bd = ef.$$

Itt a c és b oldalakat Pythagoras tétele alapján e , a , d -vel kifejezve e -re ezt az egyenletet kapjuk:

$$a\sqrt{e^2 - d^2} + d\sqrt{e^2 - a^2} = ef.$$

Az innen négyzetreemeléssel, rendezéssel és újabb négyzetreemeléssel adódó egyenlet egyetlen pozitív gyöke:

$$e = \frac{2adf}{\sqrt{4a^2d^2 - (f^2 - a^2 - d^2)^2}},$$

és ez f -nek már használt kifejezése alapján ismét (1)-re vezet.

Tamás Gyula (Ózd, József Attila g. III. o. t.)

Megjegyzések: Minthogy nyilván konvex négyszögről van szó, azért az ABD és CBD háromszögek csak A - vagy C -nél lehetnek tompaszögűek. Eszerint a megoldhatóság két feltétele:

$$a \cos \alpha < d \quad \text{és} \quad d \cos \alpha < a.$$

Az első feltétel teljesülésével a II. megoldás (3) részeredménye is pozitív lesz, és ugyanez áll a másodiknak a teljesülésével a (3)-ból a és d szerepének felcserélésével adódó

$$(3') \quad \operatorname{tg} (\alpha - \varepsilon) = \frac{a - d \cos \alpha}{d \sin \alpha}$$

kifejezésre.

$\alpha \neq 90^\circ$ esetén négyszögünk bármelyik szemközti oldalpár meghosszabbítása azaz egy (kisebb) derékszögű háromszög hozzácsatolása révén derékszögű háromszöggé egészíthető ki. Ennek E „új” csúcsánál levő szög $90^\circ - \alpha$, ill. $\alpha - 90^\circ$ aszerint, hogy α hegyes, ill. tompa szög. Már most egymásután kifejezve az AE átfogót, kivonással, ill. összeadással a BE vagy DE befogót, végül a CE átfogót, AC az ACE háromszögből számítható. – Az $\alpha = 90^\circ$ esetben pedig téglalap-számítással egyszerűsödik a feladat.

Elbert Árpád koordinátageometriai megoldást is küldött be.