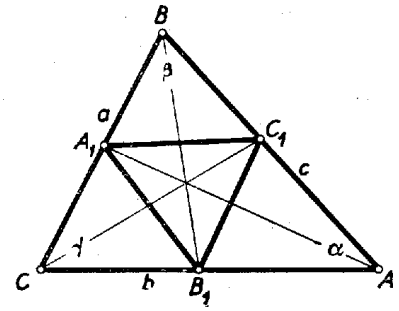
Legyenek a szögfelezők és oldalak metszéspontjai A_1, B_1, C_1, az ABC háromszög területe T.



Az ábráról leolvasható, hogy a kérdéses területet megkapjuk, ha az eredeti háromszög területéből levonjuk három kis háromszög területét:

$$t = T - t_{B_1AC_1} - t_{A_1BC_1} - t_{A_1CB_1}.$$

Határozzuk meg a kivonandó területeket két-két oldal és a közbezárt szög segítségével:

$$t = T - \frac{B_1A \cdot AC_1 \sin\alpha}{2} - \frac{A_1B \cdot BC_1 \sin\beta}{2} - \frac{A_1C \cdot CB_1 \sin\gamma}{2}. \tag{1}$$

A szereplő távolságokat és szinuszokat az eredeti háromszög oldalaival kell kifejeznünk. A szögfelezők osztásaránya alapján:

$$BC_1 = \frac{ac}{a+b}, \qquad AC_1 = \frac{bc}{a+b},$$
$$BA_1 = \frac{ac}{b+c}, \qquad CA_1 = \frac{ab}{b+c},$$
$$AB_1 = \frac{bc}{a+c}, \qquad CB_1 = \frac{ab}{a+c}.$$

A már előbb is használt háromszög területképletből pedig

$$\sin\alpha = \frac{2T}{bc}, \quad \sin\beta = \frac{2T}{ac}, \quad \sin\gamma = \frac{2T}{ab}.$$

Az (1) képletbe helyettesítve, egyszerűsítve és közös nevezőre hozva:

$$t = T\left(1 - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} - \frac{ac}{(a+b)(b+c)} - \frac{ab}{(a+c)(b+c)}\right) =$$
$$= T \cdot \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

A T területet kifejezhetjük az oldalak segítségével a Heron-képlettel:

$$t = \frac{2abc\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Trón Lajos (Debrecen, Fazekas g. III. o. t.)