

A feladatban szereplő első egyenlet értelmetlen akkor, ha valamelyik nevező 0, tehát ha

$$\sin x + \cos x = 0,$$

azaz

$$x_1 = 135^\circ \pm n \cdot 360^\circ,$$

$$x_2 = 315^\circ \pm n \cdot 360^\circ;$$

a második nevezőből ugyanígy akkor, ha

$$y_1 = 135^\circ \pm n \cdot 360^\circ, \quad y_2 = 315^\circ \pm n \cdot 360^\circ.$$

A két szög összegére vonatkozó összefüggések alapján a harmadik nevező az első két nevező szorzatára bontható:

$$\sin(x+y) + \cos(x-y) = (\sin x + \cos x)(\sin y + \cos y),$$

így ez ugyanakkor 0, mikor az első kettő.

Az említett gyököket kizárva, az egyenletet végigszorozhatjuk a nevezők legkisebb közös többszörösével:

$$(\sin x + \cos x)^2 + \sin^2 y - \cos^2 y = 1.$$

$\sin^2 y$ helyébe $1 - \cos^2 y$ -t írva:

$$(1) \quad (\sin x + \cos x)^2 - 2\cos^2 y = 0.$$

Vonjuk ki ezt az egyenletet az egyenletrendszer második egyenletéből:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$$

Bontsuk tagokra a baloldalt. A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ és a $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ összefüggések felhasználásával a következő egyenletet kapjuk:

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ebből

$$2x_1 = 60^\circ \pm n \cdot 360^\circ, \quad \text{azaz} \quad x_1 = 30^\circ \pm n \cdot 180^\circ,$$

$$2x_2 = 120^\circ \pm n \cdot 360^\circ, \quad \text{azaz} \quad x_2 = 60^\circ \pm n \cdot 180^\circ$$

($n = 0, 1, 2, 3, \dots$).

y -t legegyszerűbben úgy határozhatjuk meg, ha (1) kétszeresét levonjuk az egyenletrendszer második egyenletéből.

Így a következő egyenlethez jutunk:

$$2 \cos^2 y = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1,$$

$$\cos y = \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}.$$

Mivel $\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$ és 360° többszöröseitől eltekintve

$$\cos 30^\circ = \cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

ezért

$$2y_1 = 30^\circ \pm n \cdot 360^\circ$$

és

$$2y_2 = 330^\circ \pm n \cdot 360^\circ,$$

azaz

$$y_1 = 15^\circ \pm n \cdot 180^\circ,$$

$$y_2 = 165^\circ \pm n \cdot 180^\circ.$$

A kizárt gyökök egyikét sem kaptuk megoldásnak. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy a kapott gyökök valóban megoldásai az egyenletrendszernek.