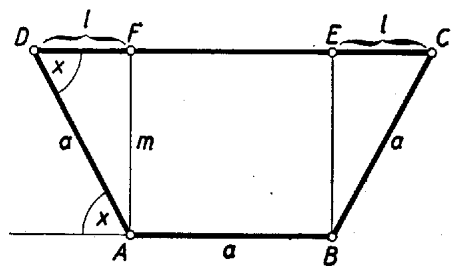
I. megoldás: Jelöljük x-szel az oldalfalnak az alapdeszkával bezárt hegyesszögét. A további jelöléseket az ábra mutatja.



Az AFD derékszögű háromszögből a trapéz magassága:

$$m=\sqrt{a^2-l^2},$$

így a trapéz területe

$$t=\frac{a+a+2l}{2}m=(a+l)\sqrt{a^2-l^2}.$$

Mivel a terület mindig pozitív, t-nek (mint l függvényének) ugyanott van maximuma, ahol $3t^2$-nek:

$$3t^2=3(a+l)^2\left(a^2-l^2\right)=(a+l)(a+l)(a+l)(3a-3l).$$

A négy tényező összege $6a$ állandó. Így a számtani-mértani közép közti egyenlőtlenség alapján a szorzat akkor maximális, ha tényezői egyenlőek:

$$a+l=3a-3l,$$

vagyis ha

$$l=\frac{a}{2}.$$

A maximális csatorna-keresztmetszetet ez már meghatározza. Számítsuk ki, hogy a lehető legnagyobb trapéz terület esetén mekkora az x szög. Az AFD derékszögű háromszögből:

$$\cos x=\frac{l}{a}.$$

Ennek értéke a maximális területű trapéz esetén $\frac{\frac{a}{2}}{a}=\frac{1}{2}$, tehát

$$x=60^\circ.$$

A csatorna térfogata eszerint akkor lesz maximális, ha az oldalfal az alapdeszkával $x=60^\circ$-os hegyesszöget zár be.

Pál Gábor (Miskolc, Kohászati techn. II. o. t.)

Megjegyzések: 1. Lényegében ugyanehhez a megoldáshoz jutunk, ha közvetlenül az alap és az oldallap közti x szöggel fejezzük ki a keresztmetszet területét. Ekkor

$$l=a\cos x,\qquad m=a\sin x,$$

így

$$t=\frac{2a+2l}{2}m=a^2(1+\cos x)\sin x.$$

Ennek ugyanott van a maximuma, mint a

$$\left(\frac{t}{a^2}\right)^2=(1+\cos x)^2\sin^2 x=(1+\cos x)^2(1-\cos^2 x)=$$
$$=(1+\cos x)(1+\cos x)(1+\cos x)(1-\cos x)$$

függvénynek és ebből 3-mal szorozva az előző megoldáshoz hasonlóan állapítható meg a maximum.

2. A feladatot megoldhatjuk differenciálszámítással is. Az ezzel a módszerrel történő megoldásokat szintén elfogadtuk.