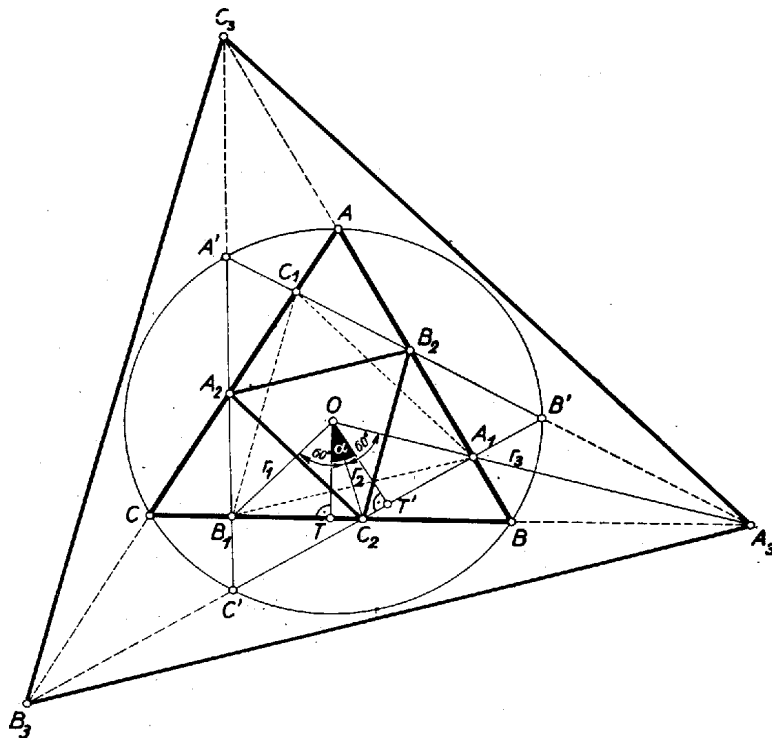


Az ábra mutatja az ABC szabályos háromszöget, az α szöggel elforgatott $A'B'C'$ szabályos háromszöget és a közös, körükük írható kört.



Más-más oldalegyeneseket tekintve megfelelőeknek, az így kapott szabályos háromszögek legyenek rendre $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$. A feladat szövegében idézett helyen bizonyítottuk, hogy az oldalegyenesek metszéspontjaként kapott szabályos háromszög középpontja szintén az eredeti háromszögek O középpontja. Ez természetesen mindegyik létrejövő szabályos háromszögre vonatkozik.

A sinus-tétel egyik ismeretes alakja szerint egy háromszögben egy oldal és a szemben levő szög sinusának aránya a köréje írt kör átmérőjével egyenlő. Mivel a szabályos háromszögek mindegyikében minden szög 60° , így a három vizsgálandó háromszög oldalának aránya a háromszögek köré írt körök sugarának arányával lesz egyenlő. Számítsuk ki az egyes körülírt körök r_1 , r_2 , r_3 sugarát.

Ha O pontból a BC szakaszra merőlegest bocsátunk, az így kapott OT szakasz hossza az eredeti ABC háromszög köré írt kör r sugarának a fele, mert hiszen OT a teljes súlyvonal harmadrésze. Ha az elforgatott $B'C'$ szakaszra húzunk merőlegest, az OT' és az előbbi OT szakaszok egymással bezárt szöge α lesz.

Ha az egymásnak megfelelő A_1 - A_2 - A_3 , ill. B_1 - B_2 - B_3 , C_1 - C_2 - C_3 csúcsokat vizsgáljuk, akkor ezek rendre az ábra egy-egy szimmetria tengelyén helyezkednek el, a három egyenes mindegyikén O is rajta van.

A szimmetria miatt a $\angle TOC_2 = \angle C_2OT' = \frac{\alpha}{2}$. A $\angle B_1OA_1$ szög 120° , mert az $A_1B_1C_1$ körülírt körében a megfelelő kerületi szög 60° . Így a szimmetria miatt $\angle B_1OC_2 = \angle C_2OA_1 = 60^\circ$.

A B_1OT derékszögű háromszögből:

$$r_1 = \frac{\frac{r}{2}}{\cos\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)},$$

az OTC_2 háromszögből:

$$r_2 = \frac{\frac{r}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

s ugyanígy az OTA_3 háromszögből

$$r_3 = \frac{\frac{r}{2}}{\cos\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

A szabályos háromszögek oldalainak aránya a körülírt körök sugarainak arányával egyezik, vagyis az arány értéke az elforgatás szögének függvényeként:

$$\frac{1}{\cos\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} : \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} : \frac{1}{\cos\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}$$