

I. megoldás: A két szög összegének és különbségének sinusára ismeretes összefüggésből könnyen igazolható a következő azonosság:

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta).$$

Hogy a bizonyítandó egyenlőségre ezt alkalmazhassuk, szorozzuk meg a baloldal minden egyes tagját $2 \sin \frac{\pi}{7}$ -tel, s osszuk is el vele:

$$\begin{aligned} & \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{7}} \left(2 \cos \frac{\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cos \frac{3\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cos \frac{5\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{7}} \left[\sin \frac{2\pi}{7} + \left(\sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} \right) + \left(\sin \frac{6\pi}{7} - \sin \frac{4\pi}{7} \right) \right] = \\ &= \frac{\sin \frac{6\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ezzel a bizonyítandó összefüggést igazoltuk.

Meskó Attila (Bp. VII., Madách gimn. IV. o. t.)

II. megoldás: Tudjuk, hogy $\cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha)$. Ezt az egyenlőség baloldalára alkalmazva:

$$\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = - \left(\cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \right).$$

Ismeretes a következő összefüggés:

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{x}{2} + \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} - 1 = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

(L. pl. Középiskolai Mat. Lapok XV. (1957.) 3–4. sz., 69. oldal.) Behelyettesítve ide az $x = \frac{2\pi}{7}$, $n = 3$ értékeket, a bizonyítandó összefüggés baloldala tovább így alakul:

$$- \left(\cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \right) = - \left(\frac{\sin \frac{7\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} \right) - \frac{1}{2}.$$

Mivel $\sin \frac{7\pi}{7} = \sin \pi = 0$, így a vizsgált összeg értéke valóban $\frac{1}{2}$.

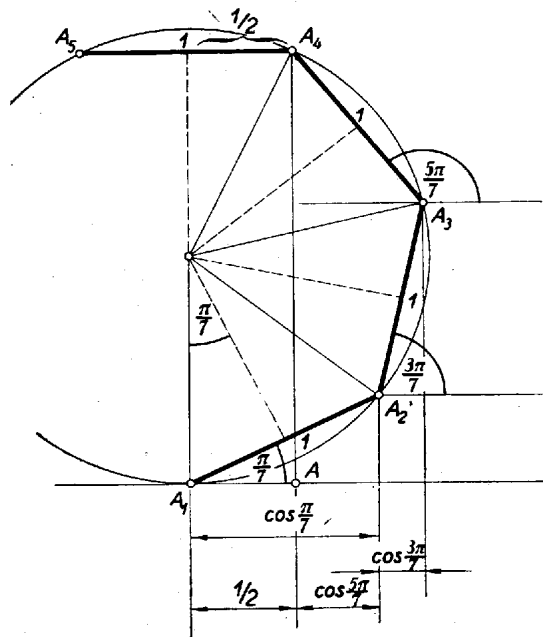
Sárközy András (Gyöngyös, Vak Bottyán g. IV. o. t.)

Megjegyzés: Ugyanezzel a gondolatmenettel belátható, hogy tetszőleges páratlan n esetén

$$\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \cos \frac{5\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-2)\pi}{n} = \frac{1}{2}.$$

Elbert Árpád (Kaposvár, Közg. techn. IV. o. t.)

III. megoldás: Vegyünk fel egy egységnyi oldalú szabályos hétszöget s a hétszög köré írható kör középpontjából a csúcsokhoz húzott sugarakkal bontsuk háromszögekre. Húzzuk meg az A_1 csúcsban a kör érintőjét, és rajzoljuk meg az egyes háromszögeknek a kör középpontjából induló magasságait (1. ábra).

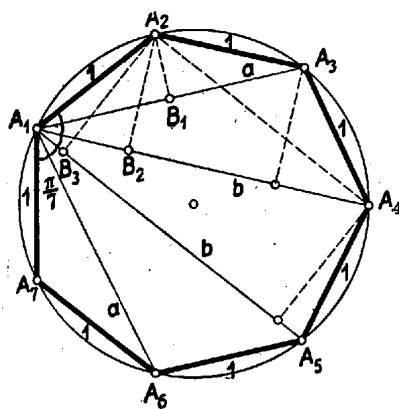


1. ábra

A magasságok az egyes háromszögek szögeit két-két $\frac{\pi}{7}$ nagyságú szögre bontják. A körérintő az A_1 pontban s az egységnyi hosszúságú A_1A_2 oldal $\frac{\pi}{7}$ nagyságú szöget zár be (hiszen szárai merőlegesek az egyik O -nál található $\frac{\pi}{7}$ nagyságú szögre), az A_2 pont vetítésével létrejövő derékszögű háromszögben az A_1 csúcshoz tartozó befogó hossza $\cos \frac{\pi}{7}$. Ugyanígy okoskodhatunk az A_2 -nél levő $\frac{3\pi}{7}$ s az A_3 csúcsnál lévő $\frac{5\pi}{7}$ szögeknél is. A kapott cosinus értékeket az érintőre vetítve (a $\cos \frac{5\pi}{7}$ értéket negatív volta miatt mindjárt visszafelé mérve) az érintőn megkapjuk a $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$ összeget. Az eredményül kapott A_1A szakasz hossza (az A_4A_5 hétszögmoldallal összemérve) $\frac{1}{2}$ lesz, amivel épp a kívánt eredményt kaptuk.

Katona Gyula (Bp. VIII., Kandó híradásip. t. III. o. t.)

IV. megoldás: Rajzoljunk egységnyi oldalú szabályos hétszöget. Az A_1 csúcsból vont átlók hossza legyen a és b . Az átlók az A_1 csúcsnál rendre $\frac{\pi}{7}$ nagyságú szögeket létesítenek (2. ábra).



2. ábra

Az A_2 -ből bocsássunk merőlegest az első három átlóra, ezek talppontjai legyenek B_1, B_2, B_3 . Így a létrejövő egységnyi átfogójú derékszögű háromszögekből

$$\cos \frac{\pi}{7} = A_1B_1, \quad \cos \frac{2\pi}{7} = -\cos \frac{5\pi}{7} = A_1B_2, \quad \cos \frac{3\pi}{7} = A_1B_3.$$

Az A_1B_1 oldal hossza $\frac{a}{2}$.
Az $A_1A_2A_3A_4$ egyenlő szárú trapézból

$$A_1B_2 = \frac{b-1}{2}.$$

Az $A_1A_2A_4A_5$ egyenlő szárú trapézból pedig

$$A_1B_3 = \frac{b-a}{2}.$$

Így

$$\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{a}{2} + \frac{b-a}{2} - \frac{b-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Győry Kálmán (Ózd, József Attila g. IV. o. t.)