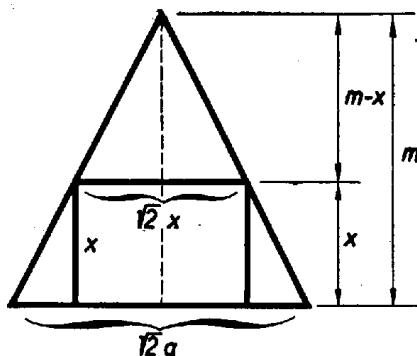


a) Legyen először a beírt kocka négy csúcsa egy-egy oldalélen. Ha két szemközti gúla-élen átfektetünk egy síkot, a gúlából ez egy háromszöget metsz ki, melynek a gúla alaplajában levő oldala $a\sqrt{2}$, a kockából pedig egy olyan téglalapot, melynek rövidebbik oldala a kocka x éle, hosszabbik oldala pedig egy kockalap átlója: $x\sqrt{2}$ (l. az ábrát).



A létrejövő hasonló háromszögek magasságainak és oldalainak aránya megegyezik:

$$\frac{m-x}{\sqrt{2}x} = \frac{m}{\sqrt{2}a}.$$

Innen

$$x = \frac{am}{a+m}.$$

A kocka térfogata:

$$V_1 = \left(\frac{am}{a+m} \right)^3.$$

b) Ha a kocka négy csúcsa egy-egy oldallap-magasságon van, akkor a kockánk tulajdonképpen egy $\frac{a}{\sqrt{2}}$ oldalú négyzet alaplappal rendelkező, m magasságú gúlában helyezkedik el az a) részben megadott módon (egy a oldalú négyzet felezőpontjainak összekötésével kapott négyzet oldala Pythagoras tételével kiszámíthatóan $\frac{a}{\sqrt{2}}$). Így az előbbi eredményt alkalmazva a kocka térfogata:

$$V^2 = \left(\frac{\frac{a}{\sqrt{2}}m}{\frac{a}{\sqrt{2}} + m} \right)^3 = \left(\frac{am}{a + \sqrt{2}m} \right)^3.$$

A köbtartalmak aránya $m = a$ esetén

$$V_1 : V_2 = \frac{a^6}{8a^3} : \frac{a^6}{(1+\sqrt{2})^3 a^3} = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \right)^3 = \frac{7+5\sqrt{2}}{8} = \frac{7+\sqrt{50}}{8} \approx 1,759.$$

Németh Judit (Kecskemét, Közg. t. III. o. t.)